Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik

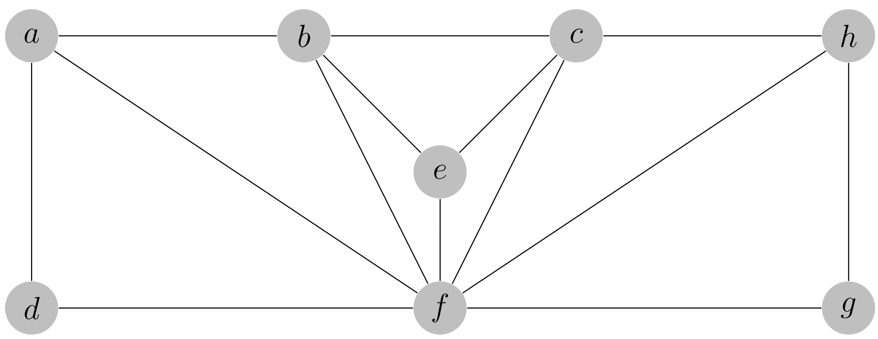
Carl Philipp Reh
Daniel König

Diskrete Mathematik für Informatiker

WS 2016/2017

Übung 7

1. Gegeben sei folgender Graph und das Matching $M = \{\{h, f\}, \{c, e\}, \{a, d\}\}$:



   a) Ist M ein größtes Matching? Ist M perfekt?

   b) Finden Sie einen erweiternden Weg, der die Kanten $\{h, f\}$ und $\{c, e\}$ enthält?

   c) Geben Sie ggf. das aus dem resultierenden Weg entstehende Matching an. Ist dieses Matching ein größtes Matching? Ist es perfekt?

2. Bestimmen Sie die Anzahl der perfekten Matchings in folgenden Graphen:

   a) $K_{n,n}$

   b) K_{2n}

3. Zeichnen Sie den Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
   $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$.

   a) Enthält G einen Eulerweg / Eulerkreis?

b) Sei $G' = (V \cup \{6\}, E \cup \{\{1,6\},\{2,6\}\})$. Enthält G' einen Eulerweg / Eulerkreis?

c) Sei $G'' = (V \cup \{6,7\}, E \cup \{\{1,6\},\{2,6\},\{3,7\},\{4,7\}\})$. Enthält G'' einen Eulerweg / Eulerkreis?

4. Bestimmen Sie ein Kriterium dafür, dass ein Graph $G = (V, E)$ einen Eulerweg, aber keinen Eulerkreis hat.

5. Sei G ein Graph mit n Knoten.

   a) Was ist die kleinste Anzahl an Kanten m, die man braucht, so dass G zusammenhängend ist?

   b) Wie viele Kanten muss G mindestens haben, so dass G in jedem Fall zusammenhängend ist?

6. a) Beweisen Sie: K_n besitzt für $n \geq 3$ einen Hamiltonkreis.

   b) Sei G ein Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Wie viele Kanten muss G mindestens enthalten, damit G auf jeden Fall einen Hamiltonkreis besitzt?

7. Das Komplement eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\{u, v\} \in \overline{E}$ genau dann, wenn $\{u, v\} \notin E$. Ein Graph G heißt selbstkomplementär, wenn G isomorph zu $\overline{G}$ ist. Beweisen Sie, dass in jedem selbstkomplementären Graphen mit n Knoten gilt: $n \equiv 0 \bmod 4$ oder $n \equiv 1 \bmod 4$.

Lösung zu Übung 7

1. a) M ist kein größtes Matching, da in der folgenden Teilaufgabe ein größeres angegeben wird. M ist nicht perfekt, da es keine Kante $E \in M$ gibt mit $b \in E$ und keine mit $g \in E$. Außerdem kann M nicht perfekt sein, da es kein größtes Matching ist.

   b) $[g, h, f, c, e, b]$

c)

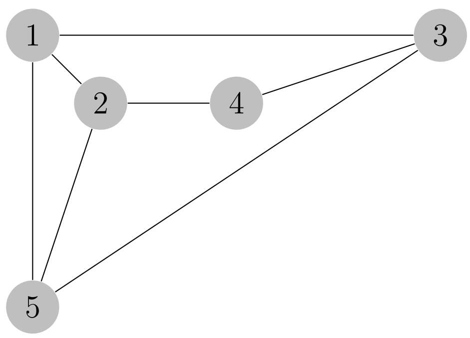
$$
\begin{aligned}
&(M \cup \{\{g,h\},\{f,c\},\{e,b\}\}) \setminus \{\{c,e\},\{h,f\}\} \\
=&\{\{a,d\},\{g,h\},\{f,c\},\{e,b\}\}
\end{aligned}
$$

Das resultierende Matching ist perfekt, also auch ein größtes Matching.

2. a) Bei $K_{n,n}$ wählen wir zu jedem Knoten auf der linken Seite ($\{\langle i,0\rangle \mid 1 \leq i \leq n\}$) einen auf der rechten ($\{\langle j,1\rangle \mid 1 \leq j \leq n\}$). Als Urnenexperiment: Die n Knoten auf der rechten Seite befinden sich in der Urne. Wir ziehen alle n Knoten der Reihe nach, wobei den Knoten $\langle j,1\rangle$ im Schritt i zu ziehen, bedeutet, dass Kante $\{\langle i,0\rangle,\langle j,1\rangle\}$ in das Matching aufgenommen wird. Beim Ziehen ist also die Reihenfolge wichtig und es wird nicht zurückgelegt, also erhalten wir $n^{\underline{n}} = n!$ Möglichkeiten.

   b) Idee: Wir ziehen zu Anfang für Knoten 1 einen anderen Knoten i mit $2 \leq i \leq 2n$, fügen Kante $\{1,i\}$ in das Matching hinzu, und fahren mit $K_{2n} \setminus \{1,i\}$ fort, der isomorph zu $K_{2(n-1)}$ ist. Schließlich kommen wir bei K_2 an, wo es für den Knoten 1 nur noch die Kante $\{1,2\}$ gibt. Insgesamt erhalten wir also: K_{2n} besitzt $\prod_{i=1}^{n} 2i-1$ perfekte Matchings (das Produkt aller ungeraden Zahlen bis $2n-1$).

3.



a) Kein Eulerweg und kein Eulerkreis, da $d_u = 4$.

b) Eulerweg $[5, 2, 1, 6, 2, 4, 3, 5, 1, 3]$, aber kein Eulerkreis, da $d_u = 2$.

c) Eulerweg $[5, 2, 1, 6, 2, 4, 3, 5, 1, 3, 7, 4]$, aber kein Eulerkreis, da $d_u = 2$.

4. $d_u = 2$

5. a) P_n besitzt die kleinste Anzahl an Kanten: $n - 1$.

   b) K_{n-1} besitzt die größte Anzahl an Kanten für $n - 1$ Knoten. Erweitert man diesen um einen Knoten, so muss man noch eine Kante hinzufügen, damit der resultierende Graph zusammenhängend ist. Insgesamt benötigt man also mindestens $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ Kanten.

6. a) $[1, \ldots, n]$ ist ein Hamiltonkreis für K_n.

   b) Idee: Betrachte K_{n-1} zusammen mit einem weiteren Knoten n. Führt man nur eine Kante ($\{i, n\}$ für $1 < i < n$) von K_{n-1} zu n, so gibt es keinen Hamiltonkreis. Führt man allerdings eine weitere Kante ein ($\{j, n\}$ für $1 < i \neq j < n$), so gibt es einen Hamiltonkreis. Die Behauptung ist also, dass es bei mindestens $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ Kanten einen Hamiltonkreis geben muss.
   Sei also $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$, $|E| = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$, und sei $\{x, y\} \notin E$. Wenn wir zeigen können, dass $d_G(x) + d_G(y) \geq n$, so hat G nach dem Satz von Ore in jedem Fall einen Hamiltonkreis. Wir nehmen an, dass $d_G(x) + d_G(y) \leq n - 1$ und führen dies zum Widerspruch. Betrachte $(V', E') = G \setminus \{x, y\}$. Es

gilt, dass $|V'| = n - 2$ und

$$
\begin{aligned}
|E'| \geq |E| - (n-1) &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 - (n-1) \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{4 - 2(n-1)}{2} \\
&= \frac{n^2 - 3n + 2 + 4 - 2n + 2}{2} \\
&= \frac{n^2 - 5n + 8}{2} \\
&= \frac{n^2 - 5n}{2} + 4
\end{aligned}
$$

K_{n-2} besitzt aber nur $\frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{n^2-5n+6}{2} = \frac{n^2-5n}{2} + 3$ Kanten, was ein Widerspruch ist.

7. Damit G isomorph zu seinem Komplement ist, muss $|E| = |\overline{E}|$ gelten. Es gilt $K_n = (V, E \cup \overline{E})$. K_n besitzt $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten, also $2|E| = \frac{n(n-1)}{2}$, und damit $|E| = \frac{n(n-1)}{4}$. Es muss also entweder n oder $n-1$ durch 4 teilbar sein. Im Fall, dass $n-1$ durch 4 teilbar ist, bleibt beim Dividieren von n durch 4 ein Rest von 1.