Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik

Carl Philipp Reh
Daniel König

Diskrete Mathematik für Informatiker

WS 2016/2017

Übung 10

1. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass U genau dann ein Normalteiler ist, wenn für alle $a \in G$ die Gleichung $a \circ U = U \circ a$ gilt, also wenn Links- und Rechtsnebenklassen von U übereinstimmen.

2. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)/n\mathbb{Z}$ isomorph ist zu $(\mathbb{Z}_n, +_n)$.

3. Beweisen Sie, dass für jeden Homomorphismus zwischen zwei endlichen Gruppen $\varphi : G_1 \to G_2$ gilt: $|G_1| = |\ker(\varphi)| \cdot |\mathrm{im}(\varphi)|$.

4. Gegeben sei die Gruppe $G = (\mathbb{Z}, +)$, deren Untergruppe $U = 4\mathbb{Z}$ und die Abbildung $\varphi : G/U \to (\mathbb{Z}_2, +_2)$ mit $\varphi(a + 4\mathbb{Z}) = a \mod 2$ für $a \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass φ
   a) eine Funktion ist.
   b) ein Homomorphismus ist.
   c) kein Isomorphismus ist.

5. Geben Sie die Primfaktorzerlegung der folgenden Zahlen an:
   a) 1024
   b) 3072
   c) 15360
   d) 30030

6. Sei kgV(a, b) das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$\mathrm{kgV}(a, b) := \min\{n > 0 \mid a|n \wedge b|n\}.$$

Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt

$$a \cdot b = \mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b).$$