

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für beliebige Formeln F, G :

- (a) Wenn $\neg F$ erfüllbar ist, dann ist F unerfüllbar.
- (b) Wenn F unerfüllbar ist, dann ist $\neg F$ erfüllbar.
- (c) Wenn F und G gültig sind, dann gilt $F \equiv G$.
- (d) Wenn F und G erfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.
- (e) Wenn F und G unerfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.
- (f) Wenn F erfüllbar und G gültig ist, dann gilt $F \equiv G$ oder $\neg F$ ist erfüllbar.

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen mit Hilfe der Äquivalenzregeln aus der Vorlesung (siehe Folien 64–65):

- (a) $A \vee B \equiv ((\neg A) \rightarrow (A \wedge C)) \vee ((C \vee B) \wedge B) \vee B$
- (b) $\neg A \wedge B \wedge C \equiv \neg A \wedge ((C \wedge D) \vee (C \wedge \neg D)) \wedge (A \vee B)$
- (c) $A \wedge \neg(B \vee (C \wedge \neg D)) \equiv (\neg A \vee B \vee C) \rightarrow \neg(A \wedge D \rightarrow B)$

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für beliebige Formeln F, G, H :

- (a) Wenn $F \equiv G$ gilt, dann müssen F und G die gleichen atomaren Formeln enthalten.
- (b) $(F \rightarrow G) \rightarrow H \equiv F \rightarrow (G \rightarrow H)$.
- (c) Aus $F \equiv G \vee H$ folgt $F \equiv G$ oder $F \equiv H$.
- (d) Aus $F \rightarrow G \equiv G \rightarrow F$ folgt $F \equiv G$.
- (e) Angenommen $F, G \models H$ und $F, H \models G$ und $G, H \models F$. Dann sind alle drei Formeln äquivalent zueinander.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass über den atomaren Formeln A_1, \dots, A_n genau 2^{2^n} Formeln existieren, die paarweise nicht äquivalent sind.