

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind.

- (a) $\exists y \forall x (f(x) = g(x, y)) \wedge \exists x (f(x) \neq g(x, x))$
- (b) $\forall x P(f(x, x)) \wedge \forall x \forall y ((x \neq y) \rightarrow \neg P(f(x, y)))$
- (c) $\forall x (P(x) \vee Q(x, y)) \wedge \neg Q(y, y) \wedge \forall x ((x \neq y) \rightarrow \neg P(x))$

Aufgabe 2

Geben Sie prädikatenlogische Formeln an, die die folgenden Strukturen trennen.

- (a) $\mathcal{A}_1 = (\{0, 1\}, I_{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{A}_2 = (\{0, 1\}, I_{\mathcal{A}_2})$
mit $f^{\mathcal{A}_1}(x, y) = x \wedge y$, $f^{\mathcal{A}_2}(x, y) = x \vee y$ und $P^{\mathcal{A}_1} = P^{\mathcal{A}_2} = \{0\}$
- (b) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, I_{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{A}_2})$
mit $f^{\mathcal{A}_1}(x, y) = x \cdot y$, $f^{\mathcal{A}_2}(x, y) = x + y$ und $P^{\mathcal{A}_1} = P^{\mathcal{A}_2} = \{x \mid x \text{ gerade}\}$
- (c) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{A}_2})$
mit $f^{\mathcal{A}_1}(x) = x^2$, $f^{\mathcal{A}_2}(x) = 2 \cdot x$ und $P^{\mathcal{A}_1} = P^{\mathcal{A}_2} = \{x \mid x \geq 0\}$

Zusatz: Lösen Sie (b) und (c) ohne die Relation P .

Aufgabe 3

Gegeben sei die Formel

$$F = \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \\ \wedge \forall x \neg R(x, x) \wedge \exists x \forall y (x \neq y \rightarrow R(y, x)) \wedge \forall x \exists y R(y, x)$$

- (a) Berechnen Sie eine Skolemform F' von F .
- (b) Geben Sie ein Modell \mathcal{A} von F an.
- (c) Geben Sie ein Modell \mathcal{A}' von F' , welches \mathcal{A} erweitert.