Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Logik I
WS 2017/18

Übungsblatt 7

Aufgabe 1
Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$, wobei $U_\mathcal{A}$ die Menge aller Menschen ist und $I_\mathcal{A}$ die folgende Interpretation ist:

- $W^\mathcal{A}(x)$: x ist weiblich
- $K^\mathcal{A}(x,y)$: x kennt y
- $v^\mathcal{A}(x) = y$: y ist biologischer Vater von x
- $m^\mathcal{A}(x) = y$: y ist biologischer Mutter von x
- $a^\mathcal{A}$ ist Adam, $e^\mathcal{A}$ ist Eva

Was bedeuten die folgenden prädikatenlogischen Formeln?

(a) $\forall x W(m(x))$

(b) $v(x) = a \wedge K(x,e)$

(c) $\exists x(W(x) \wedge K(a,x))$

(d) $\neg\exists x \forall y(W(y) \rightarrow K(x,y))$

(e) $\forall x \neg(\exists y(v(y) = x) \wedge \exists y(m(y) = x))$

(f) $\exists x \exists y(K(x,y) \wedge \neg K(y,x))$

Drücken Sie die folgenden Aussagen durch prädikatenlogische Formeln aus:

(a) Jeder kennt sich selbst.

(b) Es gibt eine weibliche Person, die Adam kennt.

(c) Jedes Elternpaar kennt sich.

(d) x und y sind Geschwister.

(e) x ist Großvater von y.

(f) Eva ist die Cousine von Adam.

Aufgabe 2
Sei P ein einstelliges und R ein zweistelliges Relationssymbol; außerdem sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Wobei handelt es sich um prädikatenlogische Formeln?

(a) $\exists x \neg P(x)$

(b) $\forall x \forall y(R(x,y) \rightarrow f(R(x,y)))$

(c) $f(x) = f(x)$

(d) $\forall n \exists p \exists q\,(n = p \cdot q)$

(e) $\exists x \forall y(P(y) \vee \neg\forall x R(x, f(x)))$

(f) $P(x)$

(g) $f(f(x))$

(h) $\forall y R(x,z) \wedge \exists x P(y)$

Aufgabe 3
Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein zweistelliges Prädikatensymbol R. Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0,1,2\}, I_{\mathcal{C}})$, wobei $f^{\mathcal{C}}(x,y) = x,\ R^{\mathcal{C}} = \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$, wobei $f^{\mathcal{N}}(x,y) = x \cdot y,\ R^{\mathcal{N}} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$
- $\mathcal{P} = (2^{\mathbb{N}}, I_{\mathcal{P}})$, wobei $f^{\mathcal{P}}(x,y) = x \cap y,\ R^{\mathcal{P}} = \{(x,y) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid x \subseteq y\}$

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

(a) $\exists x \forall y R(y,x)$

(b) $\forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$

(c) $\forall x \exists y \exists z (y \neq z \wedge f(y,z) = x)$

(d) $\forall x \forall y \forall z \forall w (R(x,y) \wedge R(z,w) \rightarrow R(f(x,z), f(y,w)))$

Aufgabe 4
Wir betrachten die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$ über den natürlichen Zahlen (ohne 0) mit den Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ (mit der üblichen Bedeutung). Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln.

(a) x ist ungerade.

(b) Es existiert ein multiplikativ neutrales Element.

(c) $x < y$.

(d) y ist Vielfaches von x.

(e) $x \bmod y = z$.