Übungsblatt 4

Aufgabe 1
Geben Sie die Anzahl der Modelle über den atomaren Formeln $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geq 1$) für die folgenden Formeln an:

(a) $F_n = \bigwedge_{i=1}^n A_i$

(b) $G_n = \bigvee_{i=1}^n A_i$

(c) $H_n = F_n \vee G_n$

(d) $I_n = F_n \wedge G_n$

(e) $J_n = F_n \rightarrow G_n$

(f) $K_n = G_n \rightarrow F_n$

(g) $L_n = G_n \leftrightarrow F_n$

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass über den atomaren Formeln $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geq 1$) genau 2^{2^n} Formeln existieren, die paarweise nicht äquivalent sind.

Aufgabe 3
Statt Formeln über $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ zu definieren, könnte man auch andere Operatoren als Basis verwenden. Semantisch kann man eine Formel, die nur die atomaren Formeln $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geq 1$) verwendet, als eine Funktion $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ auffassen. Wir nennen eine Menge von Operatoren M *adäquat*, wenn es für jede Funktion $f\colon \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ ($n \geq 1$) eine Formel gibt, die f als Semantik hat und nur die Operatoren aus M verwendet.

(a) Wieso ist $\{\neg, \wedge, \vee\}$ adäquat?

(b) Zeigen Sie, dass $\{\neg, \wedge\}$ und $\{\neg, \vee\}$ adäquat sind.

(c) Zeigen Sie, dass $\{\wedge, \vee\}$ *nicht* adäquat ist.

(d) Sei $\perp$ definiert als $\mathcal{B} \not\models \perp$ für alle Belegungen $\mathcal{B}$. Zeigen Sie, dass $\{\perp, \rightarrow\}$ adäquat ist.

(e) Wir definieren $\bar{\wedge}$ (NAND) wie folgt: $\mathcal{B} \models F \mathbin{\bar{\wedge}} G$ genau dann, wenn $\mathcal{B} \not\models F$ oder $\mathcal{B} \not\models G$. Zeigen Sie, dass $\{\bar{\wedge}\}$ adäquat ist.