

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Der Vier-Farben-Satz besagt, dass sich jede Karte mit höchstens vier Farben färben lässt. Hierbei ist eine Karte ein planarer Graph, wobei jedes Land ein Knoten ist, und zwei Länder genau dann verbunden sind, wenn sie benachbart sind.

- (a) Formalisieren Sie, dass ein möglicherweise abzählbar unendlicher Graph vierfärbbar ist, indem Sie eine Menge aussagenlogischer Formeln angeben.
- (b) Verwenden Sie den Vier-Farben-Satz (der nur für endliche planare Graphen formuliert ist) zusammen mit dem Endlichkeitssatz, um zu zeigen, dass auch jeder abzählbar unendliche planare Graph vierfärbbar ist.

Aufgabe 2

Sei P ein einstelliges und R ein zweistelliges Relationssymbol; außerdem sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Wobei handelt es sich um prädikatenlogische Formeln?

- (a) $\exists x \neg P(x)$
- (b) $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow f(R(x, y)))$
- (c) $f(x) = f(x)$
- (d) $\forall n \exists p \exists q (n = p \cdot q)$
- (e) $\exists x \forall y (P(y) \vee \neg \forall x R(x, f(x)))$
- (f) $P(x)$
- (g) $f(f(x))$
- (h) $\forall y R(x, z) \wedge \exists x P(y)$

Aufgabe 3

Gegeben sei folgende Formel

$$F = (Q(x) \vee (\exists x \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a)) \vee \forall x R(x, z, g(x))))$$

- (a) Geben Sie alle Teilformeln und Terme an, die in F vorkommen.
- (b) Welche der Teilformeln sind Aussagen?
- (c) Geben Sie für jede Variable an, ob sie frei oder gebunden in F vorkommt.
- (d) Geben Sie die Matrix von F an.

Aufgabe 4

Zu einer Formel F sei $\text{Free}(F)$ die Menge der in ihr frei vorkommenden Variablen. Definieren Sie $\text{Free}(F)$ durch Induktion über den Formelaufbau.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$, wobei $U_{\mathcal{A}}$ die Menge aller Menschen ist und $I_{\mathcal{A}}$ die folgende Interpretation ist:

- $W^{\mathcal{A}}(x)$: x ist weiblich
- $K^{\mathcal{A}}(x, y)$: x kennt y
- $v^{\mathcal{A}}(x) = y$: y ist biologischer Vater von x
- $m^{\mathcal{A}}(x) = y$: y ist biologischer Mutter von x
- $a^{\mathcal{A}}$ ist Adam, $e^{\mathcal{A}}$ ist Eva

Was bedeuten die folgenden prädikatenlogischen Formeln?

- | | |
|---------------------------------------|---|
| (a) $\forall x W(m(x))$ | (d) $\neg \exists x \forall y (W(y) \rightarrow K(x, y))$ |
| (b) $v(x) = a \wedge K(x, e)$ | (e) $\forall x \neg (\exists y (v(y) = x) \wedge \exists y (m(y) = x))$ |
| (c) $\exists x (W(x) \wedge K(a, x))$ | (f) $\exists x \exists y (K(x, y) \wedge \neg K(y, x))$ |

Drücken Sie die folgenden Aussagen durch prädikatenlogische Formeln aus:

- | | |
|--|-----------------------------------|
| (a) Jeder kennt sich selbst. | (d) x und y sind Geschwister. |
| (b) Es gibt eine weibliche Person, die Adam kennt. | (e) x ist Großvater von y . |
| (c) Jedes Elternpaar kennt sich. | (f) Eva ist die Cousine von Adam. |