

## Übungsblatt 8

### Aufgabe 1

Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol  $f$  und ein zweistelliges Prädikatensymbol  $R$ . Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0, 1, 2\}, I_{\mathcal{C}})$ , wobei  $f^{\mathcal{C}}(x, y) = x$ ,  $R^{\mathcal{C}} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$ ,
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$ , wobei  $f^{\mathcal{N}}(x, y) = x \cdot y$ ,  $R^{\mathcal{N}} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$ ,
- $\mathcal{P} = (2^{\mathbb{N}}, I_{\mathcal{P}})$ , wobei  $f^{\mathcal{P}}(x, y) = x \cap y$ ,  $R^{\mathcal{P}} = \{(x, y) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid x \subseteq y\}$ .

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

- (a)  $F_a = \exists x \forall y R(y, x)$
- (b)  $F_b = \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$
- (c)  $F_c = \forall x \forall y \forall z \forall w ((R(x, y) \wedge R(z, w)) \rightarrow R(f(x, z), f(y, w)))$

### Aufgabe 2

Wir betrachten die Struktur  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$  über den natürlichen Zahlen (ohne 0) mit den Funktionssymbolen  $+$  und  $\cdot$  (mit der üblichen Bedeutung). Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln.

- (a)  $x$  ist ungerade.
- (b)  $x < y$ .
- (c)  $y$  ist Vielfaches von  $x$ .
- (d)  $x$  ist gleich 1.
- (e)  $x \bmod y = z$ .
- (f)  $+$  ist kommutativ.
- (g) Es gibt keine größte natürliche Zahl.

### Aufgabe 3

Zeigen Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob sie gültig, unerfüllbar, oder erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a)  $F_a = \forall x \exists y (P(x) \rightarrow P(y))$

(b)  $F_b = \forall x (R(x, y) \wedge f(x) = y)$

(c)  $F_c = \exists x P(f(x, g(x))) \wedge \forall x \neg P(f(x, x))$

(d)  $F_d = \exists y \forall x R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y)$

(e)  $F_e = \forall y \exists x f(x) = y \wedge \exists x \exists y (x \neq y \wedge f(x) = f(y))$

(f)  $F_f = \forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow S(x, y)) \wedge \forall x \forall y (S(x, y) \rightarrow R(x, y)) \wedge \neg R(a, b)$