

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass folgende Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind.

- (a) $F_a := \forall y \exists x f(x) = y$
- (b) $F_b := \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$
- (c) $F_c := (\exists y \forall x f(x) = g(x, y) \wedge \exists x f(x) \neq g(x, x))$
- (d) $F_d := (\forall x P(f(x, x)) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \neg P(f(x, y))))$
- (e) $F_e := (\forall x (P(x) \vee Q(x, y)) \wedge \neg Q(y, y) \wedge \forall x (x \neq y \rightarrow \neg P(x)))$

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

- (a) $\exists x (F \wedge G) \models (\exists x F \wedge \exists x G)$
- (b) $(\exists x F \vee \forall x G) \models \exists x (F \vee G)$
- (c) $\forall x (F \rightarrow G) \models (\forall x F \rightarrow \forall x G)$
- (d) $(\forall x F \wedge \forall x G) \models \forall x (F \wedge G)$
- (e) $\exists y \forall x F \models \forall x \exists y F$

Aufgabe 3

Definieren Sie die Substitution $F[x/t]$ formal (siehe Folie 134), wobei F eine Formel, x eine Variable und t ein Term ist.

Aufgabe 4 (Koinzidenzlemma)

Zeigen Sie: Für jede Formel F und Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} mit $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$, die zu F passend sind, gilt: Wenn \mathcal{A} und \mathcal{B} alle in F vorkommenden Funktionssymbole, Prädikatensymbole und Variablen gleich interpretieren, so gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{B}(F)$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie das Lemma über Umbenennen von Variablen (Folie 134): Sei $F = QxG$, wobei $Q \in \{\forall, \exists\}$ und y eine Variable ist, die nicht in G vorkommt. Dann gilt $F \equiv QyG[x/y]$. Sie können das Überführungslemma (Folie 143) und Aufgabe 4 verwenden.