Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 12

Definition. *Eine Sprache L ist in der Klasse* **PP** *genau dann, wenn eine randomisierte Turingmaschine M mit folgenden Eigenschaften existiert:*

- *M läuft auf allen Eingaben in polynomieller Zeit.*
- *Wenn $x \in L$, dann wird x von M mit Wahrscheinlichkeit $>\frac{1}{2}$ akzeptiert.*
- *Wenn $x \notin L$, dann wird x von M mit Wahrscheinlichkeit $\leq\frac{1}{2}$ akzeptiert.*

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass wenn $L \in \mathbf{PP}$, dann auch $(\Sigma^* \setminus L) \in \mathbf{PP}$.

Lösung. Nach Definition von **PP** gibt es eine randomisierte Turingmaschine T, die jedes $w \in L$ mit Wahrscheinlichkeit $>\frac{1}{2}$ akzeptiert, woraus folgt, dass jedes $w \notin L$ mit Wahrscheinlichkeit $\leq\frac{1}{2}$ akzeptiert wird. Wir zeigen im Folgenden, dass es eine randomisierte Turingmaschine T' für L gibt, die jedes $w \notin L$ sogar „nur“ mit Wahrscheinlichkeit $<\frac{1}{2}$ akzeptiert. Somit zeigt die Turingmaschine, die die Antwort von T' umdreht, dass das Komplement von L auch in **PP** liegt.
T hat eine Laufzeit von $p(|w|)$ bei Eingabe w, wobei p ein Polynom ist. Das heißt auch, dass T höchstens $p(|w|)$ Bits vom Zufallsband lesen kann, wofür es $\frac{1}{2^{p(|w|)}}$ Möglichkeiten gibt. Da jedes $w \in L$ von T mit Wahrscheinlichkeit $>\frac{1}{2}$ akzeptiert wird, wird es sogar mit Wahrscheinlichkeit $\geq\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{p(|w|)}}$ akzeptiert. (Die Wahrscheinlichkeit kann nicht dazwischen liegen, da dafür mehr Bits vom Zufallsband gelesen werden müssten. Z.B. kann die Wahrscheinlichkeit zu akzeptieren beim Lesen von zwei Bits nicht 0.49 sein.) Wir konstruieren nun T' aus T wie folgt: Zunächst wird T von T' laufen gelassen. Wenn T ablehnt, so lehnt auch T' ab. Wenn T akzeptiert, liest T' insgesamt $p(|w|)+1$ weitere Zufallsbits (was immer noch polynomiell in p ist). Wenn all diese Bits 1en sind, lehnt T' das Wort w ab, ansonsten akzeptiert T'. Insgesamt gilt:

- T' akzeptiert jedes Wort $w \notin L$ mit einer Wahrscheinlichkeit von
$$\leq (1/2) \cdot (1 - (1/2)^{p(|x|)+1}) < 1/2.$$
- T' akzeptiert jedes Wort $w \in L$ mit einer Wahrscheinlichkeit von
$$\begin{aligned}&\geq ((1/2) + (1/2)^{p(|w|)}) \cdot (1 - (1/2)^{p(|x|)+1})\\ &\geq (1/2) - (1/2)^{p(|x|)+2} + (1/2)^{p(|x|)} - (1/2)^{2p(|w|)+1}\\ &> 1/2.\end{aligned}$$

Aufgabe 2. MAJSAT enthält eine boolsche Formel $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ genau dann, wenn F in mehr als der Häfte aller möglichen Belegungen erfüllt ist. Zeigen Sie, dass MAJSAT $\in$ **PP**.

Lösung. Lies n Bits vom Zufallsband, die als Belegung für $x_1, \ldots, x_n$ verwendet werden. Teste, ob F unter der Belegung wahr ist.