

## Übungsblatt 2

### Aufgabe 1

Sei  $D \subseteq \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$  und sei  $E \supseteq D$  die Menge der Formeln, die nur aus den atomaren Formeln in  $D$  aufgebaut sind (Folie 31). Definieren Sie  $E$  formal.

### Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie die Erfüllbarkeit der folgenden Formeln bzw. Formelmengen:

(a)  $(A \vee B \vee \neg A)$

(b)  $(A \wedge B \wedge \neg A)$

(c)  $\{(\bigvee_{i=1}^n (\bigwedge_{j=1}^n L_{i,j})) \mid n \in \mathbb{N}\}$ , wobei  $L_{i,j} = \begin{cases} A_j, & \text{wenn } i = j, \\ \neg A_j, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$

### Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für beliebige Formeln  $F, G, H$ :

(a) Wenn  $(F \vee G)$  erfüllbar ist, dann ist auch  $F$  erfüllbar.

(b) Wenn  $(F \wedge G)$  erfüllbar ist, dann ist auch  $F$  erfüllbar.

(c) Wenn  $(F \rightarrow G)$  gültig ist, dann gilt  $F \models G$ .

(d) Wenn  $(F \rightarrow G)$  gültig ist, dann ist  $G$  erfüllbar.

(e) Wenn  $(F \leftrightarrow G)$  erfüllbar ist, dann ist  $(F \leftrightarrow G)$  auch gültig.

(f) Wenn  $(F \wedge G)$  unerfüllbar ist, dann ist  $F$  unerfüllbar oder  $G$  unerfüllbar.

(g) Wenn  $(F \vee G)$  gültig ist, dann ist  $F$  erfüllbar oder  $G$  erfüllbar.

(h) Aus  $(F \wedge G) \models H$  folgt  $F \models (G \rightarrow H)$ .

(i) Aus  $F \models (G \rightarrow H)$  folgt  $(F \wedge G) \models H$ .

(j) Wenn  $F$  und  $G$  gültig sind, dann gilt  $F \equiv G$ .

- (k) Wenn  $F$  und  $G$  erfüllbar sind, dann gilt  $F \equiv G$ .
- (l) Wenn  $F$  und  $G$  unerfüllbar sind, dann gilt  $F \equiv G$ .
- (m) Wenn  $F$  erfüllbar und  $G$  gültig ist, dann gilt  $F \equiv G$  oder  $\neg F$  ist erfüllbar.
- (n) Wenn  $F \equiv G$  gilt, dann müssen  $F$  und  $G$  dieselben atomaren Formeln enthalten.
- (o)  $((F \rightarrow G) \rightarrow H) \equiv (F \rightarrow (G \rightarrow H))$ .
- (p) Aus  $F \equiv (G \vee H)$  folgt  $F \equiv G$  oder  $F \equiv H$ .
- (q) Aus  $(F \rightarrow G) \equiv (G \rightarrow F)$  folgt  $F \equiv G$ .
- (r) Aus  $F, G \models H$  und  $F, H \models G$  und  $G, H \models F$  folgt  $F \equiv G \equiv H$ .