Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 2

Aufgabe 1
Sei $D \subseteq \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ und sei $E \supseteq D$ die Menge der Formeln, die nur aus den atomaren Formeln in D aufgebaut sind (Folie 31). Definieren Sie E formal.

Lösung
Die Menge E ist die kleinste Menge, für die folgendes gilt:

- Zunächst gilt $A \in E$ für alle $A \in D$.
- Für alle $F \in E$ gilt $\neg F \in E$.
- Für alle $F, G \in E$ gilt $(F \wedge G) \in E$ und $(F \vee G) \in E$.

Aufgabe 2
Beweisen oder widerlegen Sie die Erfüllbarkeit der folgenden Formeln bzw. Formelmengen:

(a) $(A \vee B \vee \neg A)$

Lösung
Die Formel ist erfüllbar. Z.B. gilt für $\mathcal{B}(A) = 1$ und $\mathcal{B}(B) = 1$, dass $\mathcal{B} \models (A \vee B \vee \neg A)$.

(b) $(A \wedge B \wedge \neg A)$

Lösung
Die Formel ist nicht erfüllbar: Sei $\mathcal{B}$ eine zu der Formel passende Belegung. Wenn $\mathcal{B}(A) = 0$, dann gilt $\mathcal{B} \not\models (A \wedge B \wedge \neg A)$. Wenn $\mathcal{B}(A) = 1$, dann gilt $\mathcal{B} \not\models \neg A$ und somit $\mathcal{B} \not\models (A \wedge B \wedge \neg A)$.

(c) $\{(\bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{n} L_{i,j})) \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $L_{i,j} = \begin{cases} A_j, & \text{wenn } i = j, \\ \neg A_j, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$

Lösung
Die Formelmenge ist erfüllbar mit der Belegung $\mathcal{B}(A_1) = 1$ und $\mathcal{B}(A_i) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq 2$. Dies ist auch die einzige Belegung, die die Formelmenge erfüllt.

Um auf diese Belegung zu kommen, gehen wir wie folgt vor: Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ sei $F_n = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} L_{i,j}$ die n'te Formel in der Formelmenge. Wir wollen uns davon überzeugen, dass $\mathcal{B} \models F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt.

Für $n = 1$ ist die Formel $F_1 = A_1$. Wegen $\mathcal{B}(A_1) = 1$ gilt also $\mathcal{B} \models F_1$. Mit $\mathcal{B}(A_1) = 0$ würde hingegen $\mathcal{B} \not\models F_1$ gelten.

Für $n = 2$ ist die Formel $F_2 = ((A_1 \wedge \neg A_2) \vee (\neg A_1 \wedge A_2))$. Wegen $\mathcal{B}(A_1) = 1$ und $\mathcal{B}(A_2) = 0$ erhalten wir $\mathcal{B} \models (A_1 \wedge \neg A_2)$, also gilt auch $\mathcal{B} \models F_2$. Mit $\mathcal{B}(A_2) = 1$ würde $\mathcal{B} \not\models F_2$ gelten wegen $\mathcal{B} \not\models (\neg A_1 \wedge A_2)$ und $\mathcal{B} \not\models (A_1 \wedge \neg A_2)$.

Für $n = 3$ haben wir die Formel

$$\begin{aligned} F_3 = \; & ((A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \\ & \vee(\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \\ & \vee(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)). \end{aligned}$$

Wegen $\mathcal{B}(A_1) = 1$ und $\mathcal{B}(A_2) = \mathcal{B}(A_3) = 0$ erhalten wir, dass $\mathcal{B} \models (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$, und somit $\mathcal{B} \models F_3$. Analog zu vorher würde mit $\mathcal{B}(A_3) = 1$ wieder $\mathcal{B} \not\models F_3$ gelten.

Die Argumentation für A_n mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ ist analog. Wegen $\mathcal{B}(A_1) = 1$ und $\mathcal{B}(A_2) = \cdots = \mathcal{B}(A_n) = 0$ gilt $\mathcal{B} \models (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \cdots \wedge \neg A_n)$, also $\mathcal{B} \models F_n$.

Aufgabe 3
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für beliebige Formeln F, G, H:

Lösung
Wir definieren zunächst eine unerfüllbare Formel $\bot = (A \wedge \neg A)$ und eine gültige Formel $\top = (A \vee \neg A)$. Diese werden in den Aufgaben häufiger Anwendung finden.

(a) Wenn $(F \vee G)$ erfüllbar ist, dann ist auch F erfüllbar.

Lösung
Falsch. Sei $F = \bot$ und $G = A$. Dann ist $(F \vee G)$ erfüllbar (mit $\mathcal{B}(A) = 1$), aber F ist unerfüllbar.

(b) Wenn $(F \wedge G)$ erfüllbar ist, dann ist auch F erfüllbar.

Lösung
Wahr. Wenn $(F \wedge G)$ erfüllbar ist, so gibt es eine zu $(F \wedge G)$ passende Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \models (F \wedge G)$. Daraus folgt auch $\mathcal{B} \models F$, also ist F erfüllbar.

(c) Wenn $(F \rightarrow G)$ gültig ist, dann gilt $F \models G$.

Lösung
Wahr. Sei $(F \rightarrow G)$ gültig, sei $\mathcal{B}$ eine zu F und G passende Belegung und gelte $\mathcal{B} \models F$. Da $(F \rightarrow G)$ gültig ist, gilt auch $\mathcal{B} \models (F \rightarrow G)$ und somit auch $\mathcal{B} \models G$.

(d) Wenn $(F \rightarrow G)$ gültig ist, dann ist G erfüllbar.

Lösung
Falsch. Sei $F = G = \bot$. Dann ist $(F \rightarrow G)$ gültig, aber G ist unerfüllbar.

(e) Wenn $(F \leftrightarrow G)$ erfüllbar ist, dann ist $(F \leftrightarrow G)$ auch gültig.

Lösung
Falsch. Sei $F = A$ und $G = B$. Dann ist $(F \leftrightarrow G)$ erfüllbar mit $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(B) = 1$ (oder $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(B) = 0$), aber nicht gültig, denn z.B. gilt für $\mathcal{B}(A) = 0$ und $\mathcal{B}(B) = 1$, dass $\mathcal{B} \not\models (F \leftrightarrow G)$.

(f) Wenn $(F \wedge G)$ unerfüllbar ist, dann ist F unerfüllbar oder G unerfüllbar.

Lösung
Falsch. Sei $F = A$ und $G = \neg A$. Dann ist $(F \wedge G)$ unerfüllbar, aber F und G sind jeweils erfüllbar.

(g) Wenn $(F \vee G)$ gültig ist, dann ist F erfüllbar oder G erfüllbar.

Lösung
Wahr. Sei $(F \vee G)$ gültig und sei $\mathcal{B}$ eine zu $(F \vee G)$ passende Belegung. (Zu jeder Formel F existiert mindestens eine passende Belegung $\mathcal{B}\colon D \to \{0, 1\}$, wobei D die atomaren Formeln sind, die in F vorkommen.) Da $(F \vee G)$ gültig ist, gilt $\mathcal{B} \models (F \vee G)$. Deshalb gilt auch, dass $\mathcal{B} \models F$ oder $\mathcal{B} \models G$. Somit ist F erfüllbar oder G erfüllbar.

(h) Aus $(F \wedge G) \models H$ folgt $F \models (G \to H)$.

Lösung
Wahr. Gelte $(F \wedge G) \models H$. Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige zu F, G und H passende Belegung und gelte $\mathcal{B} \models F$. Im Fall $\mathcal{B} \not\models G$ gilt auch $\mathcal{B} \models (G \to H)$. Im Fall $\mathcal{B} \models G$ gilt auch $\mathcal{B} \models (F \wedge G)$. Somit gilt wegen $(F \wedge G) \models H$ auch $\mathcal{B} \models H$, also auch $\mathcal{B} \models (G \to H)$.

(i) Aus $F \models (G \to H)$ folgt $(F \wedge G) \models H$.

Lösung
Wahr. Gelte $F \models (G \to H)$. Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige zu F, G und H passende Belegung und gelte $\mathcal{B} \models (F \wedge G)$. Somit gilt auch $\mathcal{B} \models F$ und $\mathcal{B} \models G$. Aus $F \models (G \to H)$ folgt also $\mathcal{B} \models (G \to H)$. Wegen $\mathcal{B} \models G$ folgt auch $\mathcal{B} \models H$.

(j) Wenn F und G gültig sind, dann gilt $F \equiv G$.

Lösung
Wahr. Seien F und G gültig. Für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt also $\mathcal{B} \models F$ und $\mathcal{B} \models G$, d.h. $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$, also $F \equiv G$.

(k) Wenn F und G erfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.

Lösung
Falsch. Sei $F = \top$ und $G = A$. Dann sind F und G erfüllbar, aber F ist gültig, d.h. $\mathcal{B} \models F$ für jedes zu F passende $\mathcal{B}$. Für $\mathcal{B}(A) = 0$ gilt aber $\mathcal{B} \not\models G$. Somit gilt $F \not\equiv G$.

(l) Wenn F und G unerfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.

Lösung
Wahr. Seien F und G unerfüllbar. Für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt also $\mathcal{B} \not\models F$ und $\mathcal{B} \not\models G$, d.h. $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$, also $F \equiv G$.

(m) Wenn F erfüllbar und G gültig ist, dann gilt $F \equiv G$ oder $\neg F$ ist erfüllbar.

Lösung
Wahr. Sei F erfüllbar und G gültig. Im Fall, dass F auch gültig ist, gilt $F \equiv G$. Im Fall, dass F nicht gültig ist, gibt es eine zu F passende Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \not\models F$, also $\mathcal{B} \models \neg F$, d.h. $\neg F$ ist erfüllbar.

(n) Wenn $F \equiv G$ gilt, dann müssen F und G dieselben atomaren Formeln enthalten.

Lösung
Falsch. Für $F = (A \vee \neg A)$ und $G = (B \vee \neg B)$ gilt $F \equiv G$, da beide Formeln gültig sind, aber sie enthalten nicht dieselben atomaren Formeln.

(o) $((F \to G) \to H) \equiv (F \to (G \to H))$.

Lösung
Falsch. Wir wählen $F = \bot$, $G = \top$ und $H = \bot$. Dann ist $((F \to G) \to H)$ unerfüllbar, denn für jede zu F, G und H passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt, dass $\mathcal{B} \models (F \to G)$, weil $\mathcal{B} \not\models F$, und zudem gilt $\mathcal{B} \not\models H$, also insgesamt $\mathcal{B} \not\models ((F \to G) \to H)$. Auf der anderen Seite ist $(F \to (G \to H))$ gültig, denn für jede zu F, G und H passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt, dass $\mathcal{B} \not\models F$, also $\mathcal{B} \models (F \to (G \to H))$.

(p) Aus $F \equiv (G \vee H)$ folgt $F \equiv G$ oder $F \equiv H$.

Lösung
Falsch. Sei $F = \top$, $G = A$ und $H = \neg A$. Es gilt $F \equiv (G \vee H)$ aber nicht $F \equiv G$ oder $F \equiv H$.

(q) Aus $(F \to G) \equiv (G \to F)$ folgt $F \equiv G$.

Lösung
Wahr. Gelte $(F \to G) \equiv (G \to F)$. Sei $\mathcal{B}$ eine zu F und G passende Belegung. Fallunterscheidung: Die Fälle wenn $\mathcal{B} \models F$ und $\mathcal{B} \models G$, oder wenn $\mathcal{B} \not\models F$ und $\mathcal{B} \not\models G$ führen offensichtlich zu $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Gelte nun $\mathcal{B} \models F$ und $\mathcal{B} \not\models G$. Dann gilt $\mathcal{B} \models (G \to F)$, aber $\mathcal{B} \not\models (F \to G)$, was ein Widerspruch zu der Annahme ist, dass $(F \to G) \equiv (G \to F)$. Der Fall, dass $\mathcal{B} \models G$ und $\mathcal{B} \not\models F$ ist analog. Also kann insgesamt nur $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$ gelten, d.h. $F \equiv G$.

(r) Aus $F, G \models H$ und $F, H \models G$ und $G, H \models F$ folgt $F \equiv G \equiv H$.

Lösung

Falsch. Sei $F = \top$, $G = \bot$ und $H = \bot$. Es gilt $\top, \bot \models \bot$ (also $F, G \models H$ und $F, H \models G$), denn für jede zu F, G und H passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt, dass wenn $\mathcal{B} \models \bot$ und $\mathcal{B} \models \top$, dann auch $\mathcal{B} \models \bot$. Außerdem gilt $\bot, \bot \models \top$ (also $G, H \models F$), weil $\top$ gültig ist. Es gilt aber auch $\bot \not\equiv \top$, also $F \not\equiv G$.