Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 3

Aufgabe 1
Zeigen Sie folgende Aussagen für beliebige Formeln F, G:

(a) $F \models G$ genau dann, wenn $(F \to G)$ gültig ist.

Lösung
Gelte $F \models G$ und sei $\mathcal{B}$ eine zu F und G passende Belegung. Wegen $F \models G$ folgt aus $\mathcal{B} \models F$, dass $\mathcal{B} \models G$. Somit kann der Fall, dass $\mathcal{B} \models F$, aber $\mathcal{B} \not\models G$ nicht eintreten, also gilt auch $\mathcal{B} \models (F \to G)$. Damit ist $(F \to G)$ gültig.

Wenn $(F \to G)$ gültig ist, dann gilt für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$, dass $\mathcal{B} \models (F \to G)$. Aus $\mathcal{B} \models F$ folgt damit auch $\mathcal{B} \models G$, also $F \models G$.

(b) $F \equiv G$ genau dann, wenn $(F \leftrightarrow G)$ gültig ist.

Lösung
Gelte $F \equiv G$. Dann gilt für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$, dass $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Daraus folgt, dass $\mathcal{B} \models (F \leftrightarrow G)$, also ist $(F \leftrightarrow G)$ gültig.

Wenn $(F \leftrightarrow G)$ gültig ist, dann gilt für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$, dass $\mathcal{B} \models (F \leftrightarrow G)$, also $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Daraus folgt, dass $F \equiv G$.

(c) $F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$.

Lösung
Gelte $F \equiv G$. Dann gilt für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$, dass $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Aus $\mathcal{B} \models F$ folgt somit $\mathcal{B} \models G$, also gilt $F \models G$. Umgekehrt folgt auch aus $\mathcal{B} \models G$, dass $\mathcal{B} \models F$, also gilt $G \models F$.

Gelte nun $F \models G$ und $G \models F$. Sei $\mathcal{B}$ eine zu F und G passende Belegung. Wenn $\mathcal{B} \models F$, so gilt wegen $F \models G$ auch $\mathcal{B} \models G$. Gelte nun $\mathcal{B} \not\models F$. Wenn $\mathcal{B} \models G$, so erhalten wir wegen $G \models F$ einen Widerspruch. Also kann nur $\mathcal{B} \not\models G$ gelten. Insgesamt gilt $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$, also $F \equiv G$.

(d) Wenn für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt, dass $\mathcal{B} \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{B} \models G$, dann gilt $F \equiv G$.

Lösung
Sei $\mathcal{B}$ eine zu F und G passende Belegung, und gelte $\mathcal{B} \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{B} \models G$. Im Fall, dass $\mathcal{B} \models F$, gilt auch $\mathcal{B} \models G$, also $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Im Fall, dass $\mathcal{B} \not\models F$, kann nicht $\mathcal{B} \models G$ gelten, also erhalten wir $\mathcal{B} \not\models G$, und somit $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Daraus folgt, dass $F \equiv G$.

(e) $F \equiv \neg\neg F$

Lösung
Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige zu F passende Belegung. Es gilt $\mathcal{B} \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{B} \not\models \neg F$, was genau dann gilt, wenn $\mathcal{B} \models \neg\neg F$. Also gilt $F \equiv \neg\neg F$.

(f) $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$

Lösung
Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige zu F und G passende Belegung. Es gilt $\mathcal{B} \models \neg(F \wedge G)$ genau dann, wenn $\mathcal{B} \not\models (F \wedge G)$. Dies gilt genau dann, wenn $\mathcal{B} \not\models F$ oder $\mathcal{B} \not\models G$. Dies wiederum gilt genau dann, wenn $\mathcal{B} \models \neg F$ oder $\mathcal{B} \models \neg G$, was genau dann gilt, wenn $\mathcal{B} \models (\neg F \vee \neg G)$. Daraus folgt, dass $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$.

(g) Wenn F gültig ist, dann gilt $(F \vee G) \equiv F$.

Lösung
Sei F gültig und sei $\mathcal{B}$ eine beliebige zu F und G passende Belegung. Aus $\mathcal{B} \models F$ folgt $\mathcal{B} \models (F \vee G)$, also $F \models (F \vee G)$. Gelte nun $\mathcal{B} \models (F \vee G)$. Da F gültig ist, gilt auch $\mathcal{B} \models F$, also $(F \vee G) \models F$. Insgesamt gilt also, dass $(F \vee G) \equiv F$.

(h) $(F \leftrightarrow G) \equiv ((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$

Lösung
Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige zu F und G passende Belegung.

Wenn $\mathcal{B} \models (F \leftrightarrow G)$, dann gilt $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Im Fall, dass $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G) = 0$, gilt $\mathcal{B} \models (F \rightarrow G)$ und $\mathcal{B} \models (G \rightarrow F)$. Analog gilt im Fall, dass $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G) = 1$, auch $\mathcal{B} \models (F \rightarrow G)$ und $\mathcal{B} \models (G \rightarrow F)$. Insgesamt gilt also $\mathcal{B} \models ((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$, also $(F \leftrightarrow G) \models ((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$.

Wenn $\mathcal{B} \models ((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$, dann gilt $\mathcal{B} \models (F \rightarrow G)$ und $\mathcal{B} \models (G \rightarrow F)$. Im Fall, dass $\mathcal{B} \models F$, folgt auch wegen $\mathcal{B} \models (F \rightarrow G)$, dass $\mathcal{B} \models G$. Im Fall, dass $\mathcal{B} \not\models F$, kann nicht $\mathcal{B} \models G$ gelten, denn sonst würden wir mit $\mathcal{B} \models (G \rightarrow F)$ einen Widerspruch erhalten, also gilt $\mathcal{B} \not\models G$. Insgesamt gilt also auch $\mathcal{B} \models (F \leftrightarrow G)$, also $((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)) \models (F \leftrightarrow G)$.

Wir erhalten also, dass $(F \leftrightarrow G) \equiv ((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$.

Aufgabe 2
Seien F_1, F_2 und F_3 Formeln mit folgenden Wahrheitstafeln:

A	B	C	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Geben Sie DNF(F_i) und KNF(F_i) für $i \in \{1, 2, 3\}$ an. Verwenden Sie hierzu die Definition von Folie 70.

Lösung
Wir lassen im Folgenden die Klammern für $\wedge$ und $\vee$, die nebeneinander stehen, weg.

$$\begin{aligned}
\mathrm{DNF}(F_1) &= ((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \\
&\quad \vee (A \wedge B \wedge C)) \\
\mathrm{KNF}(F_1) &= ((A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)) \\
\mathrm{DNF}(F_2) &= ((\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \\
\mathrm{KNF}(F_2) &= ((A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \\
&\quad \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)) \\
\mathrm{DNF}(F_3) &= ((\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \\
&\quad \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)) \\
\mathrm{KNF}(F_3) &= ((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C))
\end{aligned}$$

Aufgabe 3
Sei $F = ((\neg A \rightarrow B) \vee \neg(A \vee \neg C))$. Formen Sie F in KNF um, indem Sie die Regeln auf Folie 75 verwenden.

Lösung
Um die Regeln auf Folie 75 anwenden zu können, müssen wir zunächst F in eine Form bringen, die nur $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ verwendet (siehe Folie 34):

$$F = ((\neg\neg A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg C))$$

Anwenden der Regeln für $\neg$:

$$\begin{aligned}
F &= ((\neg\neg A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg C)) \\
&\equiv ((A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg C)) \\
&\equiv ((A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg\neg C)) \\
&\equiv ((A \vee B) \vee (\neg A \wedge C))
\end{aligned}$$

Anwenden der Regeln für $\vee$:

$$\begin{aligned} F &\equiv ((A \vee B) \vee (\neg A \wedge C)) \\ &\equiv (((A \vee B) \vee \neg A) \wedge ((A \vee B) \vee C)) \end{aligned}$$

Aufgabe 4
Was müssen Sie an den Regeln auf Folie 75 ändern, damit eine zu F äquivalente DNF konstruiert wird?

Lösung
Man muss bloß in Punkt 2 die $\wedge$ und $\vee$ vertauschen, also:

$$\begin{aligned} (F \wedge (G \vee H)) &\rightsquigarrow ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)) \\ ((F \vee G) \wedge H) &\rightsquigarrow ((F \wedge H) \vee (G \wedge H)) \end{aligned}$$