Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 4

Aufgabe 1
Beantworten Sie folgende Fragen durch Anwenden des Markierungsalgorithmus: (Hinweis: Wir lassen einige der Klammern zwecks besserer Lesbarkeit weg.)

(a) Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar?

(1) $(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge \neg C \wedge A \wedge D \wedge (\neg D \vee B)$

Lösung
Diese Formel ist äquivalent zu

$$(A \wedge B \to C) \wedge (C \to 0) \wedge (1 \to A) \wedge (1 \to D) \wedge (D \to B).$$

- Markiere A wegen $1 \to A$ und markiere D wegen $1 \to D$.
- Markiere B wegen $D \to B$ und weil D markiert und B nicht markiert ist.
- Markiere C wegen $A \wedge B \to C$ und weil A und B markiert sind und C nicht markiert ist.
- Gib "unerfüllbar" aus, weil $C \to 0$ und C markiert ist.

Die Formel ist also unerfüllbar.

(2) $(C \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee D \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E \vee F) \wedge A \wedge \neg F$

Lösung
Diese Formel ist äquivalent zu

$$(A \to C) \wedge (A \wedge B \wedge C \to D) \wedge (A \to B) \wedge (D \wedge E \to F) \wedge (1 \to A) \wedge (F \to 0).$$

- Markiere A wegen $1 \to A$.
- Markiere C wegen $A \to C$ und weil A markiert und C nicht markiert ist.
- Markiere B wegen $A \to B$ und weil A markiert und B nicht markiert ist.
- Markiere D wegen $A \wedge B \wedge C \to D$ und weil A, B und C markiert sind und D nicht markiert ist.
- Gib "erfüllbar" aus.

Die Formel ist also erfüllbar.

(b) Welche der folgenden Formeln sind gültig?

(1) $(\neg B \wedge C) \vee C \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee \neg A$

Lösung
Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&\neg((\neg B \wedge C) \vee C \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee \neg A) \\
\equiv &(B \vee \neg C) \wedge \neg C \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge A \\
\equiv &(C \to B) \wedge (C \to 0) \wedge (A \to B) \wedge (B \to A) \wedge (1 \to A)
\end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

- Markiere A wegen $1 \to A$.
- Markiere B wegen $A \to B$ und weil A markiert und B nicht markiert ist.
- Gib erfüllbar aus.

Die Formel ist also nicht gültig.

(2) $(A \wedge D \wedge \neg I) \vee (B \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge H) \vee (\neg E \wedge F) \vee (\neg C \wedge F) \vee (G \wedge \neg H) \vee \neg B \vee \neg F \vee \neg G \vee I$

Lösung
Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&\neg((A \wedge D \wedge \neg I) \vee (B \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge H) \\
&\vee (\neg E \wedge F) \vee (\neg C \wedge F) \vee (G \wedge \neg H) \vee \neg B \vee \neg F \vee \neg G \vee I) \\
\equiv &(A \wedge D \to I) \wedge (B \wedge E \to D) \wedge (B \wedge C \wedge H \to A) \\
&\wedge (F \to E) \wedge (F \to C) \wedge (G \to H) \wedge (1 \to B) \wedge (1 \to F) \wedge (1 \to G) \wedge (I \to 0)
\end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

- Markiere B wegen $1 \to B$, markiere F wegen $1 \to F$ und markiere G wegen $1 \to G$.
- Markiere E wegen $F \to E$ und weil F markiert und E nicht markiert ist.
- Markiere C wegen $F \to C$ und weil F markiert und C nicht markiert ist.
- Markiere D wegen $B \wedge E \to D$ und weil B und E markiert sind und D nicht markiert ist.
- Markiere H wegen $G \to H$ und weil G markiert und H nicht markiert ist.
- Markiere A wegen $B \wedge C \wedge H \to A$ und weil B, C und H markiert sind und A nicht markiert ist.
- Markiere I wegen $A \wedge D \to I$ und weil A und D markiert sind und I nicht markiert ist.
- Gib unerfüllbar aus, weil $I \to 0$ und I markiert ist.

Die Formel ist also gültig.

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(1) $\neg C \vee \neg D \vee E,\ A,\ \neg A \vee C \vee \neg B \models E \vee \neg B$

Lösung
Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&(\neg C \vee \neg D \vee E) \wedge A \wedge (\neg A \vee C \vee \neg B) \wedge \neg(E \vee \neg B)\\
\equiv&(\neg C \vee \neg D \vee E) \wedge A \wedge (\neg A \vee C \vee \neg B) \wedge \neg E \wedge B\\
\equiv&(C \wedge D \to E) \wedge (1 \to A) \wedge (A \wedge B \to C) \wedge (E \to 0) \wedge (1 \to B)
\end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

- Markiere A wegen $1 \to A$ und markiere B wegen $1 \to B$.
- Markiere C wegen $A \wedge B \to C$ und weil A und B markiert sind und C nicht markiert ist.
- Gib "erfüllbar" aus.

Die Aussage ist also falsch.

(2) $A \vee \neg B \vee \neg D,\ \neg B \vee \neg G \vee F,\ \neg A \vee E \vee \neg C \vee \neg F,\ B,\ D \models E \vee \neg G \vee (\neg C \wedge D)$

Lösung
Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&(A \vee \neg B \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg G \vee F) \wedge (\neg A \vee E \vee \neg C \vee \neg F)\\
&\wedge B \wedge D \wedge \neg(E \vee \neg G \vee (\neg C \wedge D))\\
\equiv&(A \vee \neg B \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg G \vee F) \wedge (\neg A \vee E \vee \neg C \vee \neg F)\\
&\wedge B \wedge D \wedge \neg E \wedge G \wedge (C \vee \neg D)\\
\equiv&(B \wedge D \to A) \wedge (B \wedge G \to F) \wedge (A \wedge C \wedge F \to E)\\
&\wedge (1 \to B) \wedge (1 \to D) \wedge (E \to 0) \wedge (1 \to G) \wedge (D \to C)
\end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

- Markiere B wegen $1 \to B$, markiere D wegen $1 \to D$ und markiere G wegen $1 \to G$.
- Markiere A wegen $B \wedge D \to A$ und weil B und D markiert sind und A nicht markiert ist.
- Markiere F wegen $B \wedge G \to F$ und weil B und G markiert sind und F nicht markiert ist.
- Markiere C wegen $D \to C$ und weil D markiert und C nicht markiert ist.
- Markiere E wegen $A \wedge C \wedge F \to E$ und weil A, C und F markiert sind und E nicht markiert ist.
- Gib unerfüllbar aus, weil $E \to 0$ und E markiert ist.

Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 2
Seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\colon \{A_1, \dots, A_n\} \to \{0,1\}$ zwei Belegungen. Wir schreiben $\mathcal{B}_1 \le \mathcal{B}_2$ genau dann, wenn für alle $A \in \{A_1, \dots, A_n\}$ gilt: Wenn $\mathcal{B}_1(A) = 1$, dann auch $\mathcal{B}_2(A) = 1$. Außerdem sei $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)\colon \{A_1, \dots, A_n\} \to \{0,1\}$ definiert als

$$\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{B}_1(A) = 1 \text{ und } \mathcal{B}_2(A) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei F eine Formel über den atomaren Formeln $\{A_1, \dots, A_n\}$. Wir nennen ein Modell $\mathcal{B}\colon \{A_1, \dots, A_n\} \to \{0,1\}$ für F *kleinstes Modell für* F, wenn für alle anderen Modelle $\mathcal{B}'\colon \{A_1, \dots, A_n\} \to \{0,1\}$ für F gilt, dass $\mathcal{B} \le \mathcal{B}'$.

(a) Zeigen Sie, dass $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \le \mathcal{B}_1$ und $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \le \mathcal{B}_2$ für zwei beliebige Belegungen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\colon \{A_1, \dots, A_n\} \to \{0,1\}$.

Lösung
Wenn $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(A) = 1$ für $A \in \{A_1, \dots, A_n\}$, dann gilt auch nach Definition von inf, dass $\mathcal{B}_1(A) = 1$ und $\mathcal{B}_2(A) = 1$, also $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \le \mathcal{B}_1$ und $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \le \mathcal{B}_2$.

(b) Sei F eine Hornformel mit atomaren Formeln $\{A_1, \dots, A_n\}$. Zeigen Sie, dass für alle $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\colon \{A_1, \dots, A_n\} \to \{0,1\}$ gilt: Wenn $\mathcal{B}_1 \models F$ und $\mathcal{B}_2 \models F$, dann gilt auch $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \models F$.

Lösung
Wir bezeichnen $\{A_1, \dots, A_n\}$ mit V. Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ mit $m \ge 1$ eine Hornformel. Seien weiter $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\colon V \to \{0,1\}$ mit $\mathcal{B}_1 \models F$ und $\mathcal{B}_2 \models F$. Daraus folgt, dass $\mathcal{B}_1 \models K_i$ und $\mathcal{B}_2 \models K_i$ für alle $1 \le i \le m$. Wir müssen nun zeigen, dass $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \models K_i$ für alle $1 \le i \le m$. Dazu machen wir eine Fallunterscheidung über die Form der K_i.

Wenn $K_i = 1 \to B$ mit $B \in V$, dann muss sowohl $\mathcal{B}_1(B) = 1$, als auch $\mathcal{B}_2(B) = 1$ gelten, also gilt $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(B) = 1$, und somit $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \models K_i$.

Sei nun $K_i = B_1 \wedge \cdots \wedge B_k \to \alpha$, wobei $B_1, \dots, B_k \in V$ und $\alpha \in V \cup \{0\}$. Wenn es ein $A \in \{B_1, \dots, B_k\}$ gibt mit $\mathcal{B}_1(A) = 0$ oder $\mathcal{B}_2(A) = 0$, dann gilt auch $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(A) = 0$ und somit $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \models K_i$. Gelte also nun $\mathcal{B}_1(A) = 1$ und $\mathcal{B}_2(A) = 1$ für alle $A \in \{B_1, \dots, B_k\}$. Dann gilt auch $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(A) = 1$ für alle $A \in \{B_1, \dots, B_k\}$. Außerdem gilt dann wegen $\mathcal{B}_1 \models B_1 \wedge \cdots \wedge B_k$ und $\mathcal{B}_1 \models K_i$ auch $\mathcal{B}_1 \models \alpha$. Analog gilt das Gleiche für $\mathcal{B}_2$, also $\mathcal{B}_2 \models \alpha$. Im Fall, dass $\alpha = 0$, ist dies ein Widerspruch, also kann nur α von der Form $\alpha = B \in V$ sein. Wegen $\mathcal{B}_1(B) = 1$ und $\mathcal{B}_2(B) = 1$ folgt dann $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(B) = 1$ und somit $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \models K_i$.

Insgesamt gilt also auch $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \models F$.

(c) Geben Sie eine Formel an, zu der keine äquivalente Hornformel existiert.

Lösung
Sei $F = A \vee B$ und seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\colon \{A, B\} \to \{0,1\}$ zwei Belegungen mit $\mathcal{B}_1(A) = 1$, $\mathcal{B}_1(B) = 0$, $\mathcal{B}_2(A) = 0$ und $\mathcal{B}_2(B) = 1$. Es gilt $\mathcal{B}_1 \models F$ und $\mathcal{B}_2 \models F$. Sei nun F' eine zu F äquivalente Hornformel. Da $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(X) = 0$ für $X \in \{A, B\}$, gilt $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \not\models F$, also muss auch $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \not\models F'$ gelten wegen $F \equiv F'$, was aber ein Widerspruch zu Teilaufgabe b ist.

(d) Zeigen Sie, dass jede erfüllbare Hornformel F ein kleinstes Modell besitzt.

Lösung
Seien $A_1, \ldots, A_n$ die atomaren Formeln in F. Seien $M(F)$ die Modelle von F, also

$$M(F) = \{\mathcal{B}\colon \{A_1, \ldots, A_n\} \to \{0,1\} \mid \mathcal{B} \models F\}$$

mit $M(F) = \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m\}$. Da F erfüllbar ist, gilt $M(F) \neq \emptyset$. Wir definieren nun

$$\inf(M) = \begin{cases} \mathcal{B}_1, & \text{wenn } m = 1, \\ \inf(\mathcal{B}_1, \cdots \inf(\mathcal{B}_{m-1}, \mathcal{B}_m) \cdots) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Fall, dass $m = 1$, gilt $\mathcal{B}_1 \models F$, also gilt $\inf(M) \models F$. Ebenso gilt $\inf(M) = \mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_1$.

Sei nun $m \geq 2$. Sei $\mathcal{B}'_m = \mathcal{B}_m$ und $\mathcal{B}'_i = \inf(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}'_{i+1})$ für $1 \leq i < m - 1$. Dann gilt $\inf(M) = \mathcal{B}'_1$.

Es gilt, dass $\mathcal{B}_m = \mathcal{B}'_m \models F$. Per Induktion folgt mit Teilaufgabe b aus $\mathcal{B}'_{i+1} \models F$ und $\mathcal{B}_i \models F$ auch, dass $\mathcal{B}'_i \models F$ für alle $1 \leq i \leq m - 1$. Insgesamt gilt also $\inf(M) \models F$.

Es gilt, dass $\mathcal{B}'_m = \mathcal{B}_m \leq \mathcal{B}_m$. Sei nun $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ und gelte $\mathcal{B}'_{i+1} \leq \mathcal{B}_j$ für alle $i + 1 \leq j \leq m$. Es gilt, dass $\mathcal{B}'_i \leq \mathcal{B}_i$ und $\mathcal{B}'_i \leq \mathcal{B}'_{i+1}$ nach Teilaufgabe a. Nach Transitivität von $\leq$ können wir dann folgern, dass $\mathcal{B}'_i \leq \mathcal{B}_j$ für alle $i \leq j \leq m$. Daraus folgt per Induktion, dass $\mathcal{B}'_1 \leq \mathcal{B}_i$ für alle $1 \leq i \leq m$, also ist $\inf(M)$ kleinstes Modell von F.

(e) Ändern Sie den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung so ab, dass er Folgendes tut: Die Eingabe ist nach wie vor eine Hornformel F. Wenn F unerfüllbar ist, dann gib „unerfüllbar" aus. Wenn F erfüllbar ist, dann liefer das kleinste Modell von F.

Lösung
Statt "erfüllbar" auszugeben, geben wir folgende Belegung $\mathcal{B}$ aus: Wir setzen $\mathcal{B}(A) = 1$ genau dann, wenn A markiert wurde.