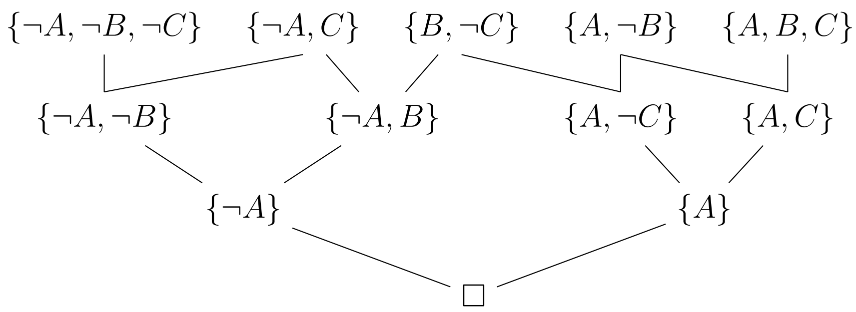
Übungsblatt 5

Aufgabe 1
Überprüfen Sie mit dem Resolutionsverfahren, welche der folgenden Klauselmengen erfüllbar sind.

(a) $\{\{A, B, C\}, \{\neg A, \neg B, \neg C\}, \{A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{\neg A, C\}\}$

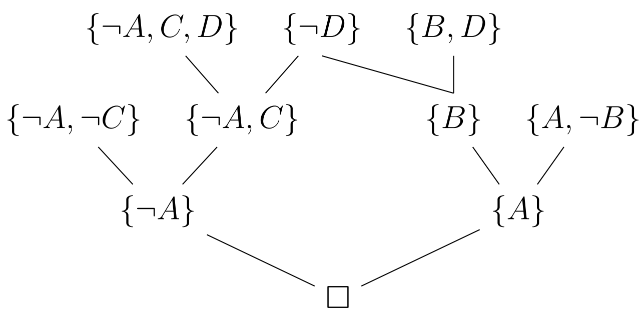
Lösung



Die Klauselmenge ist also unerfüllbar.

(b) $\{\{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg C\}, \{\neg A, C, D\}, \{\neg D\}, \{B, D\}\}$

Lösung



Die Klauselmenge ist also unerfüllbar.

(c) $\{\{A, C\}, \{B\}, \{\neg C\}, \{A, \neg B, D\}, \{A, \neg C, \neg D\}\}$

Lösung

Aus den Ausgangsklauseln können wir folgende neue Klauseln resolvieren:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{A,C\} \arrow[dr, no head] & & \{\neg C\} \arrow[dl, no head] & \{A,C\} \arrow[dr, no head] & & \{A,\neg C,\neg D\} \arrow[dl, no head] & \{B\} \arrow[dr, no head] & & \{A,\neg B,D\} \arrow[dl, no head] \\ & \{A\} & & & \{A,\neg D\} & & & \{A,D\} & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{A,\neg B,D\} \arrow[dr, no head] & & \{A,\neg C,\neg D\} \arrow[dl, no head] \\ & \{A,\neg B,\neg C\} & \end{tikzcd}$$

Danach können wir noch zwei neue Klauseln resolvieren:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{A,C\} \arrow[dr, no head] & & \{A,\neg B,\neg C\} \arrow[dl, no head] & \{B\} \arrow[dr, no head] & & \{A,\neg B,\neg C\} \arrow[dl, no head] \\ & \{A,\neg B\} & & & \{A,\neg C\} & \end{tikzcd}$$

Nun sind keine weiteren Resolutionsschritte mehr möglich. Da wir nicht die leere Klausel $\square$ herleiten konnten, ist die Klauselmenge erfüllbar.

Aufgabe 2

Berechnen Sie $\mathrm{Res}^i(F)$ für $i = 0, 1, \ldots$ für die Formel F mit Klauselmenge

$$\{\{A,\neg B\},\{A,B,\neg C\},\{B,C\},\{\neg A,\neg C\}\}.$$

Was ist die kleinste Zahl n mit $\mathrm{Res}^n(F) = \mathrm{Res}^*(F)$?

Lösung

Es gilt $\mathrm{Res}^0(F) = F$. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}^1(F) &= \mathrm{Res}^0(F) \cup \{\{A,\neg C\},\{A,C\},\{\neg B,\neg C\},\{A,B\},\{B,\neg C\},\{\neg A,B\}\}, \\ \mathrm{Res}^2(F) &= \mathrm{Res}^1(F) \cup \{\{A\},\{A,\neg A\},\{B,\neg B\},\{C,\neg C\},\{B\},\{\neg C\}\} \end{aligned}$$

und $\mathrm{Res}^{i+2}(F) = \mathrm{Res}^2(F)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also $\mathrm{Res}^*(F) = \mathrm{Res}^2(F)$.

Aufgabe 3

Sei F eine Formel in KNF, A eine atomare Formel und $F_1 = \{K \setminus \{\neg A\} \mid K \in F,\ A \notin K\}$. Zeigen Sie, dass F_1 unerfüllbar ist, wenn F unerfüllbar ist.

Lösung

Wir nehmen an, dass F_1 erfüllbar ist und zeigen, dass dann auch F erfüllbar ist. Sei $\mathcal{B}$ eine zu F_1 passende Belegung mit $\mathcal{B} \models F_1$. Wir erweitern $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$, indem wir $\mathcal{B}'(A) = 1$ setzen. Sei nun $K \in F$. Wenn $A \in K$, dann gilt $\mathcal{B}' \models K$, weil $\mathcal{B}'(A) = 1$. Wenn $A \notin K$, dann ist $K \setminus \{\neg A\} \in F_1$ und es gilt $\mathcal{B} \models K \setminus \{\neg A\}$. Dann gilt auch $\mathcal{B}' \models K$ (hier ist sogar egal, ob $\neg A$ in K vorkommt und was $\mathcal{B}'(A)$ ist). Insgesamt gilt also $\mathcal{B}' \models F$.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass für alle Formeln F, G in KNF gilt: Wenn $F \subseteq G$, dann $\mathrm{Res}^*(F) \subseteq \mathrm{Res}^*(G)$.

Lösung
Die Definition von Res lässt sich schreiben als

$$\mathrm{Res}(M) = M \cup \{(K_1 \setminus \{A\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg A\}) \mid K_1, K_2 \in M, A \in K_1, \neg A \in K_2\}.$$

Aus $F \subseteq G$ folgt unmittelbar, dass $\mathrm{Res}(F) \subseteq \mathrm{Res}(G)$. Dann lässt sich per Induktion zeigen, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{Res}^i(F) \subseteq \mathrm{Res}^i(G)$. Im Fall $i = 0$ gilt dies, weil

$$Res^0(F) = F \subseteq G = \mathrm{Res}^0(G).$$

Gelte nun $\mathrm{Res}^i(F) \subseteq \mathrm{Res}^i(G)$. Daraus folgt

$$\mathrm{Res}^{i+1}(F) = \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(F)) \subseteq \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(G)) = \mathrm{Res}^{i+1}(G).$$

Weiterhin gilt, dass $\mathrm{Res}^*(F) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(F) \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(G) = \mathrm{Res}^*(G)$.

Aufgabe 5
Sei F eine Formel in KNF, L ein Literal, und sei

$$F_{\setminus L} = \{K \setminus \{L\} \mid K \in F\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Res}^*(F_{\setminus L}) \subseteq \mathrm{Res}^*(F)_{\setminus L}$.

Lösung
Wir zeigen zunächst, dass $\mathrm{Res}(F_{\setminus L}) \subseteq \mathrm{Res}(F)_{\setminus L}$. Sei dazu $K \in \mathrm{Res}(F_{\setminus L})$. Im Fall, dass $K \in F_{\setminus L}$, gilt wegen

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(F)_{\setminus L} &= (F \cup \{(K_1 \setminus \{A\}) \cup (L_2 \setminus \{\neg A\}) \mid K_1, K_2 \in F, A \in K_1, \neg A \in K_2\})_{\setminus L} \\ &= F_{\setminus L} \cup \{(K_1 \setminus \{A\}) \cup (L_2 \setminus \{\neg A\}) \mid K_1, K_2 \in F, A \in K_1, \neg A \in K_2\}_{\setminus L}\end{aligned}$$

auch $K \in \mathrm{Res}(F)_{\setminus L}$. Sei nun K resolviert aus zwei Klauseln von $F_{\setminus L}$, d.h. es gibt $K_1, K_2 \in F_{\setminus L}$ mit $A \in K_1$, $\neg A \in K_2$ und $K = (K_1 \setminus \{A\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg A\})$. Nach Definition von $F_{\setminus L}$ gibt es $K_1', K_2' \in F$ mit $K_1 = K_1' \setminus \{L\}$ und $K_2 = K_2' \setminus \{L\}$. Weil $A \in K_1$ bzw. $\neg A \in K_2$, gilt auch $A \in K_1'$ bzw. $\neg A \in K_2'$. Also ist $(K_1' \setminus \{A\}) \cup (K_2' \setminus \{\neg A\}) \in \mathrm{Res}(F)$, woraus folgt, dass $((K_1' \setminus \{A\}) \cup (K_2' \setminus \{\neg A\})) \setminus \{L\} \in \mathrm{Res}(F)_{\setminus L}$. Wegen

$$((K_1' \setminus \{A\}) \cup (K_2' \setminus \{\neg A\})) \setminus \{L\} = (K_1' \setminus \{L\} \setminus \{A\}) \cup (K_2' \setminus \{L\} \setminus \{\neg A\}) = K$$

gilt also, dass $K \in \mathrm{Res}(F)_{\setminus L}$.

Mit Induktion zeigen wir nun, dass $\mathrm{Res}^i(F_{\setminus L}) \subseteq \mathrm{Res}^i(F)_{\setminus L}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: Für $i = 0$ gilt $\mathrm{Res}^0(F_{\setminus L}) = F_{\setminus L} = \mathrm{Res}^0(F)_{\setminus L}$. Wenn $\mathrm{Res}^i(F_{\setminus L}) \subseteq \mathrm{Res}^i(F)_{\setminus L}$, dann gilt

$$\mathrm{Res}^{i+1}(F_{\setminus L}) = \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(F_{\setminus L})) \subseteq \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(F)_{\setminus L}) \subseteq \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(F))_{\setminus L} = \mathrm{Res}^{i+1}(F)_{\setminus L}.$$

Insgesamt gilt also auch

$$\mathrm{Res}^*(F_{\setminus L}) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(F_{\setminus L}) \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(F)_{\setminus L} = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(F)\right)_{\setminus L} = \mathrm{Res}^*(F)_{\setminus L}.$$

(b) Zeigen Sie: Wenn $\square \in \mathrm{Res}^*(F_{\setminus L})$, dann gilt $\square \in \mathrm{Res}^*(F)$ oder $\{L\} \in \mathrm{Res}^*(F)$.

Lösung
Aus $\square \in \mathrm{Res}^*(F_{\setminus L})$ folgt, dass $\square \in \mathrm{Res}^*(F)_{\setminus L}$, also $\square \in \{K \setminus \{L\} \mid K \in \mathrm{Res}^*(F)\}$. Somit gilt, dass $\square \in \mathrm{Res}^*(F)$ oder $\{L\} \in \mathrm{Res}^*(F)$.