Übungsblatt 6

Aufgabe 1
Der Vier-Farben-Satz besagt, dass sich jede Karte mit höchstens vier Farben färben lässt. Hierbei ist eine Karte ein planarer Graph, wobei jedes Land ein Knoten ist, und zwei Länder genau dann verbunden sind, wenn sie benachbart sind.

(a) Formalisieren Sie, dass ein möglicherweise abzählbar unendlicher Graph vierfärbbar ist, indem Sie eine Menge aussagenlogischer Formeln angeben.

Lösung
Sei $G = (V, E)$. Für jedes $v \in V$ und $i \in \{1, \ldots, 4\}$ sei $C_{v,i}$ eine atomare Formel. Hierbei soll $C_{v,i}$ bedeuten, dass Knoten v Farbe i erhält. Wir definieren folgende Formeln:

- $F_v^1 = (\bigvee_{i=1}^4 C_{v,i})$ für $v \in V$.
- $F_v^2 = (\bigwedge_{i=1}^4 (\bigwedge_{j=i+1}^4 \neg(C_{v,i} \wedge C_{v,j})))$ für $v \in V$.
- $F_{\{u,v\}}^3 = (\bigwedge_{i=1}^4 \neg(C_{u,i} \wedge C_{v,i}))$ für $\{u, v\} \in E$.

F_v^1 bedeutet, dass v mindestens eine Farbe erhält. F_v^2 bedeutet, dass v höchstens eine Farbe erhält. $F_{\{u,v\}}^3$ bedeutet, dass die benachbarten Knoten u und v nicht dieselbe Farbe erhalten. G ist genau dann vierfärbbar, wenn

$$M_G = \{F_v^1, F_v^2 \mid v \in V\} \cup \{F_e^3 \mid e \in E\}$$

erfüllbar ist.

(b) Verwenden Sie den Vier-Farben-Satz (der nur für endliche planare Graphen formuliert ist) zusammen mit dem Endlichkeitssatz, um zu zeigen, dass auch jeder abzählbar unendliche planare Graph vierfärbbar ist.

Lösung
Sei $G = (V, E)$ ein abzählbar unendlicher planarer Graph. Für eine Formel $F \in M_G$ sagen wir, dass $v \in V$ in F *vorkommt*, wenn $F = F_v^1$, $F = F_v^2$ oder $F = F_{\{u,v\}}^3$ für ein $u \in V$. Sei nun $M \subseteq M_G$ endlich. Wir konstruieren zu M den Graph $G' = (V', E')$, wobei V' genau die Knoten sind, die in M vorkommen, und E' die Einschränkung von E auf V'. Der erhaltene Graph G' ist endlich und planar. Nach dem Vier-Farben-Satz ist er also vierfärbbar. Sei $c\colon V' \to \{1, \ldots, 4\}$ eine Vier-Färbung von G'. Mit der Belegung $\mathcal{B}\colon \{C_{v,i} \mid v \in V', 1 \leq i \leq 4\} \to \{0, 1\}$, wobei $\mathcal{B}(C_{v,i}) = 1$ genau dann, wenn $c(v) = i$, erhalten wir, dass $\mathcal{B} \models M$. Da also jede endliche Teilmenge von M_G erfüllbar ist, folgt nach dem Endlichkeitssatz auch, dass M_G selbst erfüllbar ist. Sei $\mathcal{B}'$ eine zu M_G passende Belegung mit $\mathcal{B}' \models M_G$. Wir erhalten nun eine Vier-Färbung $c'\colon V \to \{1, \ldots, 4\}$ von G, wobei $c'(v) = i$ genau dann, wenn $\mathcal{B}'(C_{v,i}) = 1$.

Aufgabe 2
Sei P ein einstelliges und R ein zweistelliges Relationssymbol; außerdem sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Wobei handelt es sich um prädikatenlogische Formeln?

(a) $\exists x \neg P(x)$

Lösung
Ja.

(b) $\forall x \forall y (R(x,y) \to f(R(x,y)))$

Lösung
Nein, denn $R(x,y)$ ist eine Formel und $f(R(x,y))$ ist damit keine Formel.

(c) $f(x) = f(x)$

Lösung
Ja.

(d) $\forall n \exists p \exists q \, n = p \cdot q$

Lösung
Nein, da $\cdot$ nicht definiert ist.

(e) $\exists x \forall y (P(y) \vee \neg \forall x R(x, f(x)))$

Lösung
Ja.

(f) $P(x)$

Lösung
Ja.

(g) $f(f(x))$

Lösung
Nein, das ist nur ein Term.

(h) $(\forall y R(x,z) \wedge \exists x P(y))$

Lösung
Ja.

Aufgabe 3
Gegeben sei folgende Formel

$$F = ((Q(x) \vee \exists x \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a))) \vee \forall x R(x, z, g(x)))$$

(a) Geben Sie alle Teilformeln und Terme an, die in F vorkommen.

Lösung
Die Terme sind x, $f(x)$, y, a, z und $g(x)$. Die atomaren Teilformeln sind $Q(x)$, $P(f(x), y)$, $Q(a)$ und $R(x, z, g(x))$. Die restlichen Teilformeln sind

$$\begin{aligned}
&(P(f(x), y) \wedge Q(a)),\\
&\forall y(P(f(x), y) \wedge Q(a)),\\
&\exists x \forall y(P(f(x), y) \wedge Q(a)),\\
&(Q(x) \vee \exists x \forall y(P(f(x), y) \wedge Q(a))),\\
&\forall x R(x, z, g(x))
\end{aligned}$$

und F selbst.

(b) Welche der Teilformeln sind Aussagen?

Lösung
$Q(a)$ und $\exists x \forall y(P(f(x), y) \wedge Q(a))$.

(c) Geben Sie für jede Variable an, ob sie frei oder gebunden in F vorkommt.

Lösung
Das x in $Q(x)$ und z sind frei, alle anderen gebunden.

(d) Geben Sie die Matrix von F an.

Lösung
$F^* = ((Q(x) \vee (P(f(x), y) \wedge Q(a))) \vee R(x, z, g(x)))$

Aufgabe 4
Zu einer Formel F sei $\mathrm{Free}(F)$ die Menge der in ihr frei vorkommenden Variablen. Definieren Sie $\mathrm{Free}(F)$ durch Induktion über den Formelaufbau.

Lösung
Wir müssen zunächst Free für Terme definieren. Für Variablen x setzen wir $\mathrm{Free}(x) = \{x\}$. Wenn f ein n-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, dann setzen wir

$$\mathrm{Free}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup \{\mathrm{Free}(t_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Nun definieren wir Free auf Formeln. Wenn R ein n-stelliges Relationssymbol ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, dann setzen wir

$$\mathrm{Free}(R(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup \{\mathrm{Free}(t_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Seien nun F und G Formeln. Wir setzen $\mathrm{Free}(F \wedge G) = \mathrm{Free}(F \vee G) = \mathrm{Free}(F) \cup \mathrm{Free}(G)$. Sei F eine Formel. Wir setzen $\mathrm{Free}(\neg F) = \mathrm{Free}(F)$. Sei F eine Formel und x eine Variable. Wir setzen $\mathrm{Free}(\forall x F) = \mathrm{Free}(\exists x F) = \mathrm{Free}(F) \setminus \{x\}$.

Aufgabe 5
Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$, wobei $U_\mathcal{A}$ die Menge aller Menschen ist und $I_\mathcal{A}$ die folgende Interpretation ist:

- $W^\mathcal{A}(x)$: x ist weiblich
- $K^\mathcal{A}(x, y)$: x kennt y
- $v^\mathcal{A}(x) = y$: y ist biologischer Vater von x
- $m^\mathcal{A}(x) = y$: y ist biologischer Mutter von x
- $a^\mathcal{A}$ ist Adam, $e^\mathcal{A}$ ist Eva

Was bedeuten die folgenden prädikatenlogischen Formeln?

(a) $\forall x W(m(x))$

Lösung
Jede Mutter ist weiblich.

(b) $(v(x) = a \wedge K(x, e))$

Lösung
Der Vater von x ist Adam und x kennt Eva.

(c) $\exists x(W(x) \wedge K(a, x))$

Lösung
Es gibt eine Frau, die von Adam gekannt wird.

(d) $\neg\exists x \forall y(W(y) \rightarrow K(x, y))$

Lösung
Es gibt niemanden, der alle Frauen kennt.

(e) $\forall x \neg(\exists y\, v(y) = x \wedge \exists y\, m(y) = x)$

Lösung
Niemand ist sowohl Mutter als auch Vater.

(f) $\exists x \exists y(K(x, y) \wedge \neg K(y, x))$

Lösung
Es gibt zwei Menschen, die sich nicht gegenseitig kennen.

Drücken Sie die folgenden Aussagen durch prädikatenlogische Formeln aus:

(a) Jeder kennt sich selbst.

Lösung
$\forall x K(x,x)$

(b) Es gibt eine weibliche Person, die Adam kennt.

Lösung
$\exists x(W(x) \wedge K(x,a))$

(c) Jedes Elternpaar kennt sich.

Lösung
$\forall x(K(v(x),m(x)) \wedge K(m(x),v(x)))$

(d) x und y sind Geschwister (derselben zwei Eltern).

Lösung
$g_{x,y} := (\neg\, x = y \wedge (m(x) = m(y) \wedge v(x) = v(y)))$.

(e) x ist Großvater von y.

Lösung
Wir definieren zunächst $e_{x,y} := (x = m(y) \vee x = v(y))$ für Variablen x und y. Die Formel ist dann $\exists z(e_{z,y} \wedge x = v(z))$.

(f) Eva ist die Cousine von Adam.

Lösung
Onkel bzw. Tante ist definiert als ein Geschwister der Eltern. Cousin bzw. Cousine ist definiert als Kind von Onkel bzw. Tante. Dass x und y Cousin bzw. Cousine voneinander sind, können wir dann schreiben als $c_{x,y} := \exists z \exists z'(e_{z,x} \wedge g_{z,z'} \wedge e_{z',y})$. Die Formel ist dann $(c_{e,a} \wedge W(e))$.