Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 7

Aufgabe 1
Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein zweistelliges Prädikatensymbol R. Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0, 1, 2\}, I_\mathcal{C})$, wobei $f^\mathcal{C}(x, y) = x$, $R^\mathcal{C} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$,
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_\mathcal{N})$, wobei $f^\mathcal{N}(x, y) = x \cdot y$, $R^\mathcal{N} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$,
- $\mathcal{P} = (2^\mathbb{N}, I_\mathcal{P})$, wobei $f^\mathcal{P}(x, y) = x \cap y$, $R^\mathcal{P} = \{(x, y) \in 2^\mathbb{N} \times 2^\mathbb{N} \mid x \subseteq y\}$.

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

(a) $F_a = \exists x \forall y R(y, x)$

(b) $F_b = \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$

(c) $F_c = \forall x \forall y \forall z \forall w ((R(x, y) \wedge R(z, w)) \rightarrow R(f(x, z), f(y, w)))$

Aufgabe 2
Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}), I_\mathcal{N})$ die Struktur mit den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ und der Gleichheit $=$, welche alle die übliche Bedeutung haben sollen, also $I_\mathcal{N}(+)(x, y) = x + y$ und $I_\mathcal{N}(\cdot)(x, y) = x \cdot y$. Bei dem Symbol $=$ gehen wir immer davon aus, dass es mit der Gleichheit interpretiert wird, also $I_\mathcal{N}(=) = \{(x, x) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^2 \mid x \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$. Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln.

(a) x ist ungerade.

(b) $x < y$.

(c) y ist Vielfaches von x.

(d) x ist gleich 1.

(e) $x \bmod y = z$.

(f) Es gibt keine größte natürliche Zahl.

Aufgabe 3
Zeigen Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob sie gültig, unerfüllbar, oder erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a = \forall x \exists y (P(x) \to P(y))$

(b) $F_b = \forall x (R(x, y) \land f(x) = y)$

(c) $F_c = (\exists x P(f(x, g(x))) \land \forall x \neg P(f(x, x)))$

(d) $F_d = (\exists y \forall x R(x, y) \to \forall x \exists y R(x, y))$

(e) $F_e = (\forall y \exists x f(x) = y \land \exists x \exists y (x \neq y \land f(x) = f(y)))$

(f) $F_f = (\forall x R(x, x) \land \forall x \forall y (x \neq y \to S(x, y)) \land \forall x \forall y (S(x, y) \to R(x, y)) \land \neg R(a, b))$