Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 7

Aufgabe 1
Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein zweistelliges Prädikatensymbol R. Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0,1,2\}, I_{\mathcal{C}})$, wobei $f^{\mathcal{C}}(x,y) = x$, $R^{\mathcal{C}} = \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$,
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$, wobei $f^{\mathcal{N}}(x,y) = x \cdot y$, $R^{\mathcal{N}} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$,
- $\mathcal{P} = (2^{\mathbb{N}}, I_{\mathcal{P}})$, wobei $f^{\mathcal{P}}(x,y) = x \cap y$, $R^{\mathcal{P}} = \{(x,y) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid x \subseteq y\}$.

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

(a) $F_a = \exists x \forall y R(y,x)$

Lösung
F_a bedeutet, dass es ein größtes Element bezüglich R gibt.

Es gilt $\mathcal{C} \not\models F_a$, denn $\mathcal{C}_{[x/0][y/1]} \not\models R(y,x)$, $\mathcal{C}_{[x/1][y/2]} \not\models R(y,x)$ und $\mathcal{C}_{[x/2][y/0]} \not\models R(y,x)$.

Für $\mathcal{N}$ bedeutet F_a, dass es eine größte natürliche Zahl gibt. Demnach gilt $\mathcal{N} \not\models F_a$. Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{N}_{[x/n]} \models \forall y R(y,x)$, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{N}_{[x/n][y/m]} \models R(y,x)$, also $m \leq n$. Dies ist aber falsch für $m = n+1$.

Für $\mathcal{P}$ bedeutet F_a, dass es eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ gilt, dass $M \subseteq A$. Dies gilt für $\mathbb{N}$ selbst, also $\mathcal{P} \models F_a$. Genauer: Sei $M \in 2^{\mathbb{N}}$. Dann gilt $\mathcal{P}_{[x/\mathbb{N}][y/M]} \models P(y,x)$, denn $M \subseteq \mathbb{N}$.

(b) $F_b = \forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$

Lösung
F_b bedeutet, dass R total ist.

Es gilt $\mathcal{C} \not\models F_b$, denn $\mathcal{C}_{[x/0][y/0]} \not\models (R(x,y) \vee R(y,x))$, weil $(0,0) \notin R^{\mathcal{C}}$.

Es gilt $\mathcal{N} \models F_b$, denn für alle $n,m \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq m$ oder $m \leq n$, bzw. $\mathcal{N}_{[x/n][y/m]} \models (R(x,y) \vee R(y,x))$.

Es gilt $\mathcal{P} \not\models F_b$, denn sei $M = \{1\}$ und $M' = \{2\}$. Dann gilt $M \not\subseteq M'$ und $M' \not\subseteq M$, also $\mathcal{P}_{[x/M][y/M']} \not\models (R(x,y) \vee R(y,x))$.

(c) $F_c = \forall x \forall y \forall z \forall w ((R(x,y) \wedge R(z,w)) \rightarrow R(f(x,z), f(y,w)))$

Lösung
Es gilt $\mathcal{C} \models F_c$, denn seien $a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$, wobei $(a, b) \in R^{\mathcal{C}}$ und $(c, d) \in R^{\mathcal{C}}$. Dann folgt wegen $f^{\mathcal{C}}(a, c) = a$ und $f^{\mathcal{C}}(b, d) = b$ auch, dass $(f^{\mathcal{C}}(a, c), f^{\mathcal{C}}(b, d)) \in R^{\mathcal{C}}$.

Es gilt $\mathcal{N} \models F_c$, denn seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, wobei $a \leq b$ und $c \leq d$. Dann gilt auch $a \cdot c \leq b \cdot d$.

Es gilt $\mathcal{P} \models F_c$, denn seien $A, B, C, D \subseteq \mathbb{N}$, wobei $A \subseteq B$ und $C \subseteq D$. Dann gilt auch $A \cap C \subseteq B \cap D$.

Aufgabe 2
Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}), I_{\mathcal{N}})$ die Struktur mit den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ und der Gleichheit $=$, welche alle die übliche Bedeutung haben sollen, also $I_{\mathcal{N}}(+)(x, y) = x + y$ und $I_{\mathcal{N}}(\cdot)(x, y) = x \cdot y$. Bei dem Symbol $=$ gehen wir immer davon aus, dass es mit der Gleichheit interpretiert wird, also $I_{\mathcal{N}}(=) = \{(x, x) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^2 \mid x \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$. Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln.

(a) x ist ungerade.

Lösung
$\neg\exists y \; x = y + y$

(b) $x < y$.

Lösung
$\exists z \; y = x + z$

(c) y ist Vielfaches von x.

Lösung
$\exists z \; y = x \cdot z$

(d) x ist gleich 1.

Lösung
$\forall y \; y \cdot x = y$

(e) $x \bmod y = z$.

Lösung
$\exists w \; z + w \cdot y = x$

(f) Es gibt keine größte natürliche Zahl.

Lösung
$\forall x \exists y \; x < y$, wobei $x < y$ die Formel von Aufgabe b ist. Damit haben wir

$$\forall x \exists y \exists z \; y = x + z.$$

Aufgabe 3
Zeigen Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob sie gültig, unerfüllbar, oder erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a = \forall x \exists y (P(x) \to P(y))$

Lösung
Gültig. Sei $\mathcal{A}$ eine zu F_a passende Struktur und sei $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$. Im Fall, dass $d \notin P^\mathcal{A}$, gilt auch $\mathcal{A}_{[x/d][y/d']} \models (P(x) \to P(y))$ für alle $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$. Wenn $d \in P^\mathcal{A}$, dann gilt $\mathcal{A}_{[x/d][y/d]} \models (P(x) \to P(y))$. In beiden Fällen gilt also $\mathcal{A}_{[x/d]} \models \exists y(P(x) \to P(y))$. Insgesamt gilt daher $\mathcal{A} \models F_a$.

(b) $F_b = \forall x (R(x, y) \wedge f(x) = y)$

Lösung
Erfüllbar, aber nicht gültig. Es gilt $\mathcal{A} \models F_b$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0\}$, $y^\mathcal{A} = 0$, $R^\mathcal{A} = \mathcal{U}_\mathcal{A} \times \mathcal{U}_\mathcal{A}$ und $f^\mathcal{A}(x) = x$. Außerdem gilt für jede zu F_b passende Struktur $\mathcal{B}$ mit $R^\mathcal{B} = \emptyset$, dass $\mathcal{B} \not\models F_b$, zum Beispiel für $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0\}$, $y^\mathcal{B} = 0$, $R^\mathcal{B} = \emptyset$ und $f^\mathcal{B}(x) = x$.

(c) $F_c = (\exists x P(f(x, g(x))) \wedge \forall x \neg P(f(x, x)))$

Lösung
Erfüllbar, aber nicht gültig. Es gilt $\mathcal{A} \models F_c$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $P^\mathcal{A} = \{0\}$,

$$f^\mathcal{A}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y, \\ 0 & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

$$g^\mathcal{A}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0, \\ 0 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Beweis: Sei $d \in \{0, 1\}$. Dann gilt $f^\mathcal{A}(d, d) = 1 \notin P^\mathcal{A}$, also $\mathcal{A} \models \forall x \neg P(f(x, x))$. Außerdem gilt $\mathcal{A} \models \exists x P(f(x, g(x)))$, weil

$$f^\mathcal{A}(0, g^\mathcal{A}(0)) = f^\mathcal{A}(0, 1) = 0 \in P^\mathcal{A}.$$

Auf der anderen Seite gilt für jede zu F_c passende Struktur $\mathcal{B}$ mit $P^\mathcal{B} = \emptyset$, dass $\mathcal{B} \not\models F_c$, denn $\mathcal{B} \not\models \exists x P(f(x, g(x)))$. Ein Beispiel für solch eine Struktur ist $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0\}$, $f^\mathcal{B}(x, y) = 0$, $g^\mathcal{B}(x) = x$, $P^\mathcal{B} = \emptyset$.

(d) $F_d = (\exists y \forall x R(x, y) \to \forall x \exists y R(x, y))$

Lösung
Gültig. Sei $\mathcal{A}$ eine zu F_d passende Struktur und gelte $\mathcal{A} \models \exists y \forall x R(x, y)$. D.h. es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[y/d]} \models \forall x R(x, y)$. Somit gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, sodass für jedes $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gilt, dass $\mathcal{A}_{[y/d][x/d']} \models R(x, y)$. Das heißt, dass es für jedes $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt, sodass $\mathcal{A}_{[x/d'][y/d]} \models R(x, y)$. Daraus folgt, dass $\mathcal{A}_{[x/d']} \models \exists y R(x, y)$ für jedes $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ und somit auch $\mathcal{A} \models \forall x \exists y R(x, y)$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models F_d$.

(e) $F_e = (\forall y \exists x f(x) = y \wedge \exists x \exists y (x \neq y \wedge f(x) = f(y)))$

Lösung
Erfüllbar, aber nicht gültig. Die Formel besagt, dass f surjektiv, aber nicht injektiv ist. Damit ist jede zu F_e passende Struktur mit endlichem Universum kein Modell von F_e. Ein Beispiel dafür ist die Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \{0\}$ und $f^{\mathcal{A}}(x) = x$, denn gibt es keine $d, d' \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d][y/d']} \models x \neq y$, also $\mathcal{A} \not\models \exists x \exists y (x \neq y \wedge f(x) = f(y))$. Daher gilt $\mathcal{A} \not\models F_e$. Sei nun $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \mathbb{N}$ und

$$f^{\mathcal{B}}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt $\mathcal{B} \models \forall y \exists x f(x) = y$, denn für $d \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f^{\mathcal{B}}(d+1) = d$. Außerdem gilt, dass $0 \neq 1$ und $f^{\mathcal{B}}(0) = 0 = f^{\mathcal{B}}(1)$. Somit gilt auch $\mathcal{B} \models \exists x \exists y (x \neq y \wedge f(x) = f(y))$, also gilt insgesamt, dass $\mathcal{B} \models F_e$.

(f) $F_f = (\forall x R(x,x) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow S(x,y)) \wedge \forall x \forall y (S(x,y) \rightarrow R(x,y)) \wedge \neg R(a,b))$

Lösung
Unerfüllbar. Sei $\mathcal{A}$ eine zu F_f passende Struktur, wobei wir annehmen, dass $\mathcal{A} \models F_f$. Wegen $\mathcal{A} \models \neg R(a,b)$, muss $(a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}) \notin R^{\mathcal{A}}$ gelten. Wenn $a^{\mathcal{A}} = b^{\mathcal{A}}$, so ist dies ein Widerspruch zu $\mathcal{A} \models \forall x R(x,x)$. Sei also $a^{\mathcal{A}} \neq b^{\mathcal{A}}$. Wegen $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow S(x,y))$, gilt also, dass $(a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}) \in S^{\mathcal{A}}$. Wegen $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (S(x,y) \rightarrow R(x,y))$, folgt dann auch, dass $(a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}) \in R^{\mathcal{A}}$, was aber ein Widerspruch zu $(a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}) \notin R^{\mathcal{A}}$ ist. Insgesamt muss also $\mathcal{A} \not\models F_f$ gelten.