

Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass folgende Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a := \forall y \exists x f(x) = y$

(b) $F_b := \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

(c) $F_c := (\exists y \forall x f(x) = g(x, y) \wedge \exists x f(x) \neq g(x, x))$

(d) $F_d := (\forall x P(f(x, x)) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \neg P(f(x, y))))$

(e) $F_e := (\forall x (P(x) \vee Q(x, y)) \wedge \neg Q(y, y) \wedge \forall x (x \neq y \rightarrow \neg P(x)))$

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen für beliebige Formeln F und G :

(a) $\exists x (F \wedge G) \models (\exists x F \wedge \exists x G)$

(b) $(\exists x F \vee \forall x G) \models \exists x (F \vee G)$

(c) $\forall x (F \rightarrow G) \models (\forall x F \rightarrow \forall x G)$

(d) $(\forall x F \wedge \forall x G) \models \forall x (F \wedge G)$

(e) $\exists y \forall x F \models \forall x \exists y F$

Aufgabe 3

Definieren Sie die Substitution $F[x/t]$ formal (siehe Folie 134), wobei F eine Formel, x eine Variable und t ein Term ist.

Aufgabe 4 (Koinzidenzlemma)

Zeigen Sie: Für jede Formel F und Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} mit $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$, die zu F passend sind, gilt: Wenn \mathcal{A} und \mathcal{B} alle in F vorkommenden Funktionssymbole, Prädikatensymbole und freien Variablen gleich interpretieren, so gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{B}(F)$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie das Lemma über Umbenennen von Variablen (Folie 142): Sei G eine Formel, $Q \in \{\forall, \exists\}$ und y eine Variable, die nicht in G vorkommt. Dann gilt

$$QxG \equiv QyG[x/y].$$

Hinweis: Verwenden Sie das Überführungslemma (Folie 151) und Aufgabe 4.