Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 8

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass folgende Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a := \forall y \exists x \; f(x) = y$

Lösung
Es gilt $\mathcal{A} \models F_a$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0\}$ und $f^\mathcal{A}(x) = 0$. Außerdem gilt $\mathcal{B} \not\models F_a$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0, 1\}$ und $f^\mathcal{B}(x) = 0$.

(b) $F_b := \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

Lösung
Es gilt $\mathcal{A} \models F_b$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0\}$ und $f^\mathcal{A}(x) = 0$. Außerdem gilt $\mathcal{B} \not\models F_b$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0, 1\}$ und $f^\mathcal{B}(x) = 0$.

(c) $F_c := (\exists y \forall x \, f(x) = g(x, y) \wedge \exists x \, f(x) \neq g(x, x))$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $f^\mathcal{A}(x) = x$, $g^\mathcal{A}(x, 0) = x$ und $g^\mathcal{A}(x, 1) = 0$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \exists y \forall x \, f(x) = g(x, y)$, weil $\mathcal{A}_{[x/d][y/0]}(f(x)) = d$ und $\mathcal{A}_{[x/d][y/0]}(g(x, y)) = d$ für alle $d \in \{0, 1\}$. Außerdem gilt $\mathcal{A} \models \exists x \, f(x) \neq g(x, x)$, weil $\mathcal{A}_{[x/1]}(f(x)) = 1$ und $\mathcal{A}_{[x/1]}(g(x, x)) = 0$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models F_c$. Mit $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0\}$, $f^\mathcal{B}(x) = 0$ und $g^\mathcal{B}(x, y) = 0$ gilt $\mathcal{B} \not\models F_c$, weil $\mathcal{B} \not\models \exists x \, f(x) \neq g(x, x)$.

(d) $F_d := (\forall x P(f(x, x)) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \neg P(f(x, y))))$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0\}$, $f^\mathcal{A}(x, y) = 0$ und $P^\mathcal{A} = \{0\}$. Aus $|\mathcal{U}_\mathcal{A}| = 1$ folgt, dass $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \neg P(f(x, y)))$. Außerdem gilt $\mathcal{A} \models \forall x P(f(x, x))$, also insgesamt auch $\mathcal{A} \models F_d$. Sei $\mathcal{B}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0\}$, $f^\mathcal{B}(x) = 0$ und $P^\mathcal{B} = \emptyset$. Dann gilt $\mathcal{B} \not\models F_d$, weil $\mathcal{B} \not\models \forall x P(f(x, x))$.

(e) $F_e := (\forall x (P(x) \vee Q(x, y)) \wedge \neg Q(y, y) \wedge \forall x (x \neq y \rightarrow \neg P(x)))$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0\}$, $y^\mathcal{A} = 0$, $P^\mathcal{A} = \{0\}$ und $Q^\mathcal{A} = \emptyset$. Es gilt $\mathcal{A} \models F_e$, denn $\mathcal{A} \models \forall x (x \neq y \rightarrow \neg P(x))$, weil $|\mathcal{U}_\mathcal{A}| = 1$. Des Weiteren gilt $\mathcal{A} \models \neg Q(y, y)$. Außerdem gilt, dass $\mathcal{A} \models \forall x (P(x) \vee Q(x, y))$, denn $\mathcal{A}_{[x/0]} \models P(x)$. Sei $\mathcal{B}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0\}$, $P^\mathcal{B} = Q^\mathcal{B} = \emptyset$ und $y^\mathcal{B} = 0$. Dann gilt $\mathcal{B} \not\models F_e$, weil $\mathcal{B} \not\models \forall x (P(x) \vee Q(x, y))$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie die folgenden Behauptungen für beliebige Formeln F und G:

(a) $\exists x(F \wedge G) \models (\exists xF \wedge \exists xG)$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die zu F und G passend ist, und gelte $\mathcal{A} \models \exists x(F \wedge G)$. Dann gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \wedge G)$. Also gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ und $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Somit gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ und es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Daraus folgt, dass $\mathcal{A} \models \exists xF$ und $\mathcal{A} \models \exists xG$, also $\mathcal{A} \models (\exists xF \wedge \exists xG)$.

(b) $(\exists xF \vee \forall xG) \models \exists x(F \vee G)$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die zu F und G passend ist, und gelte $\mathcal{A} \models (\exists xF \vee \forall xG)$. D.h. $\mathcal{A} \models \exists xF$ oder $\mathcal{A} \models \forall xG$. Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Im Fall, dass $\mathcal{A} \models \exists xF$, gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$. Also gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Zusammen gilt dann, dass es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \vee G)$, also $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$. Im anderen Fall gilt $\mathcal{A} \models \forall xG$. Weil $|\mathcal{U}_\mathcal{A}| \neq \emptyset$, gilt auch $\mathcal{A} \models \exists xG$. Analog zum ersten Fall erhalten wir auch hier, dass $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$.

(c) $\forall x(F \to G) \models (\forall xF \to \forall xG)$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine zu F und G passende Struktur und gelte $\mathcal{A} \models \forall x(F \to G)$. Daraus folgt, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \to G)$ für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$. Das heißt, dass für jedes $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gilt, dass wenn $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$, dann gilt auch $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Gelte nun außerdem $\mathcal{A} \models \forall xF$, woraus folgt, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$. Zusammen erhalten wir also, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$ für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, also $\mathcal{A} \models \forall xG$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models (\forall xF \to \forall xG)$.

(d) $(\forall xF \wedge \forall xG) \models \forall x(F \wedge G)$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine zu F und G passende Struktur mit $\mathcal{A} \models (\forall xF \wedge \forall xG)$. D.h. $\mathcal{A} \models \forall xF$ und $\mathcal{A} \models \forall xG$. Also gilt für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ und für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Damit gilt für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ und $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Somit gilt für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \wedge G)$, also auch $\mathcal{A} \models \forall x(F \wedge G)$.

(e) $\exists y\forall xF \models \forall x\exists yF$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine zu F passende Struktur mit $\mathcal{A} \models \exists y\forall xF$. D.h. es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[y/d]} \models \forall xF$. Also gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ so, dass für alle $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A}_{[y/d][x/d']} \models F$. Für alle $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt es also ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d'][y/d]} \models F$. D.h. für alle $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A}_{[x/d']} \models \exists yF$, also $\mathcal{A} \models \forall x\exists yF$.

Aufgabe 3
Definieren Sie die Substitution $F[x/t]$ formal (siehe Folie 134), wobei F eine Formel, x eine Variable und t ein Term ist.

Lösung
Wir definieren zunächst Substitution auf Termen: Sei y eine Variable. Dann ist

$$y[x/t] = \begin{cases} t, & \text{falls } x = y, \\ y, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Sei f ein n-stelliges Funktionssymbol und $t_1, \ldots, t_n$ Terme. Dann ist

$$f(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t]).$$

Für Formeln gehen wir dann wie folgt vor: Sei $F = R(t_1, \ldots, t_n)$, wobei R ein n-stelliges Relationssymbol und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind. Dann ist

$$R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t]).$$

Sei $F = (G \wedge H)$, wobei G und H Formeln sind. Dann ist $(G \wedge H)[x/t] = (G[x/t] \wedge H[x/t])$.
Der Fall für $\vee$ ist analog, also $(G \vee H)[x/t] = (G[x/t] \vee H[x/t])$.
Sei $F = \neg G$, wobei G eine Formel ist. Dann ist $\neg G[x/t] = \neg(G[x/t])$. Die Klammern dienen hier nur dazu, deutlich zu machen, worauf die Substitution angewandt wird. Sie sind nicht Teil der Syntax.
Sei $F = QyG$, wobei G eine Formel, $Q \in \{\forall, \exists\}$ und y eine Variable ist. Dann ist

$$QyG[x/t] = \begin{cases} QyG, & \text{falls } x = y, \\ Qy(G[x/t]), & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Die Klammern sind auch hier nicht Teil der Syntax.

Aufgabe 4 (Koinzidenzlemma)
Zeigen Sie: Für jede Formel F und Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \mathcal{U}_\mathcal{B}$, die zu F passend sind, gilt: Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ alle in F vorkommenden Funktionssymbole, Prädikatensymbole und freien Variablen gleich interpretieren, so gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{B}(F)$.

Lösung
Zunächst zeigen wir etwas Ähnliches für Terme. Für jeden Term t gilt: Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ alle in t vorkommenden Funktionssymbole und Variablen gleich interpretieren, so gilt $\mathcal{A}(t) = \mathcal{B}(t)$. Dazu verwenden wir Induktion. Im Fall, dass $t = x$ für eine Variable x, gilt also $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$. Sei nun $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, wobei f ein n-stelliges Funktionssymbol und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind. Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ alle Symbole und Variablen in t gleich interpretieren, gilt $f^\mathcal{A} = f^\mathcal{B}$ und dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ alle in $t_1, \ldots, t_n$ vorkommenden Funktionssymbole und Variablen gleich interpretieren. Per Induktion folgt also, dass $\mathcal{A}(t_i) = \mathcal{B}(t_i)$ für $1 \leq i \leq n$. Insgesamt gilt daher, dass

$$\mathcal{A}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^\mathcal{A}(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_n)) = f^\mathcal{B}(\mathcal{B}(t_1), \ldots, \mathcal{B}(t_n)) = \mathcal{B}(f(t_1, \ldots, t_n)).$$

Für Formeln zeigen wir dies dann entsprechend mit Induktion. Sei $F = R(t_1, \ldots, t_n)$, wobei R ein n-stelliges Relationssymbol und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind. Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ alle in F vorkommenden Symbole und freie Variablen gleich interpretieren, gilt $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}}$ und dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ alle in $t_1, \ldots, t_n$ vorkommenden Funktionssymbole und Variablen gleich interpretieren. Insgesamt gilt also, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(R(t_1, \ldots, t_n)) = 1 &\Leftrightarrow (\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_n)) \in R^{\mathcal{A}} \\ &\Leftrightarrow (\mathcal{B}(t_1), \ldots, \mathcal{B}(t_n)) \in R^{\mathcal{B}} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{B}(R(t_1, \ldots, t_n)) = 1.\end{aligned}$$

Sei nun $F = (G \wedge H)$, wobei G und H Formel sind. Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ alle in F vorkommenden Symbole und freien Variablen gleich interpretieren, interpretieren sie auch alle in G und H vorkommenden Symbole und freien Variablen gleich. Also folgt nach Induktionsvoraussetzung, dass $\mathcal{A}(G) = \mathcal{B}(G)$ und $\mathcal{A}(H) = \mathcal{B}(H)$. Somit erhalten wir

$$\mathcal{A}(F) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}(G) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(H) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{B}(G) = 1 \text{ und } \mathcal{B}(H) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{B}(F) = 1.$$

Die Argumentation ist analog für $\vee$ und $\neg$. Sei nun $F = \forall x G$, wobei G eine Formel und x eine Variable ist. Sei $d \in \mathcal{U}_A$ (bzw. $d \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$, denn es gilt $\mathcal{U}_A = \mathcal{U}_B$). Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ alle in F vorkommenden Symbole und freien Variablen gleich interpretieren, interpretieren $\mathcal{A}_{[x/d]}$ und $\mathcal{B}_{[x/d]}$ alle in G vorkommenden Symbole und freien Variablen gleich. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also, dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(G) = \mathcal{B}_{[x/d]}(G)$. Da dies also für alle $d \in \mathcal{U}_A$ gilt, folgt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{B}(F)$. Die Argumentation für $\exists$ ist analog.

Aufgabe 5
Zeigen Sie das Lemma über Umbenennen von Variablen (Folie 142): Sei G eine Formel, $Q \in \{\forall, \exists\}$ und y eine Variable, die nicht in G vorkommt. Dann gilt

$$QxG \equiv QyG[x/y].$$

Hinweis: Verwenden Sie das Überführungslemma (Folie 151) und Aufgabe 4.

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine zu QxG und $QyG[x/y]$ passende Struktur. Sei $d \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Es gilt

$$\mathcal{A}_{[x/d]}(G) = \mathcal{A}_{[y/d][x/d]}(G) = \mathcal{A}_{[y/d][x/\mathcal{A}_{[y/d]}(y)]}(G) = \mathcal{A}_{[y/d]}(G[x/y]).$$

Die erste Gleichheit gilt wegen dem Koinzidenzlemma, weil y nicht in G vorkommt, also interpretieren $\mathcal{A}_{[x/d]}$ und $\mathcal{A}_{[y/d][x/d]}$ alle in G vorkommenden Symbole und freien Variablen gleich. Die letzte Gleichheit gilt wegen dem Überführungslemma, welches angewandt werden kann, weil y nicht in G vorkommt.
Sei $Q = \forall$. Es gilt also für alle $d \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$ genau dann, wenn $\mathcal{A}_{[y/d]} \models G[x/y]$, also $\mathcal{A} \models \forall x G$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \models \forall y G[x/y]$. Der Fall, dass $Q = \exists$, ist analog.