

## Übungsblatt 10

### Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgende Aussage:

$$F = (P(a) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow (\neg P(s(x)) \wedge P(s(s(x)))))$$

- (a) Geben Sie das Herbrand-Universum  $D(\mathcal{F})$  an, wobei  $\mathcal{F}$  die Menge aller Funktionssymbole in der Formel  $F$  ist.

#### Lösung

Es gilt  $\mathcal{F} = \{a, s\}$ . Also ist das Herbrand-Universum

$$D(\mathcal{F}) = \{a, s(a), s(s(a)), \dots\} = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- (b) Geben Sie ein Herbrand-Modell  $\mathcal{A}$  für  $F$  an. Beschreiben Sie  $\mathcal{A}$  in einfachen Worten.

#### Lösung

Ein Term  $s^n(a) \in D(\mathcal{F})$  kann als Darstellung der natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  aufgefasst werden. Idee:  $P$  bedeutet „gerade“ und  $s$  bedeutet „Nachfolger“. Damit sagt  $P(a)$ , dass 0 gerade ist, und  $(P(x) \rightarrow (\neg P(s(x)) \wedge P(s(s(x)))))$  sagt: Für jede gerade natürliche Zahl  $n$  gilt, dass  $n + 1$  nicht gerade ist und  $n + 2$  gerade ist.

Wir definieren also  $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = D(\mathcal{F})$ , wobei  $a^{\mathcal{A}} = s^0(a)$ ,  $s^{\mathcal{A}}(s^n(a)) = s(s^n(a)) = s^{n+1}(a)$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $P^{\mathcal{A}} = \{s^{2n}(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Damit ist  $\mathcal{A}$  eine Herbrand-Struktur und es gilt  $\mathcal{A} \models F$ .

### Aufgabe 2

Überführen Sie die folgenden Formeln jeweils in eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage in Klauselform, indem Sie wie auf Folie 165 beschrieben vorgehen:

#### Lösung

Im letzten Übungsblatt haben wir bereits Formeln zunächst in BPF und anschließend in Skolemform überführt. Zusätzlich dazu müssen wir nun zwei weitere Dinge tun: Wir müssen eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage herstellen. Eine Aussage darf keine freien Variablen enthalten, was wir dadurch erreichen, dass wir jede freie Variable durch eine neue Konstante ersetzen. Außerdem muss die neue Formel in Klauselform sein. Das heißt, ihre Matrix (die Formel ohne Quantoren) muss in KNF sein.

- (a)  $F_a = (\forall y(\forall x R(x) \rightarrow Q(y, z)) \wedge \forall x P(x))$

### Lösung

Bereinigen:  $(\forall y_1(\forall x_1 R(x_1) \rightarrow Q(y_1, z)) \wedge \forall x_2 P(x_2))$

Frei vorkommende Variablen ersetzen:  $(\forall y_1(\forall x_1 R(x_1) \rightarrow Q(y_1, a_z)) \wedge \forall x_2 P(x_2))$

Pränexform:

- Grundform mit  $\wedge, \vee, \neg$ :  $(\forall y_1(\neg \forall x_1 R(x_1) \vee Q(y_1, a_z)) \wedge \forall x_2 P(x_2))$
- Reinziehen von  $\neg$ :  $(\forall y_1(\exists x_1 \neg R(x_1) \vee Q(y_1, a_z)) \wedge \forall x_2 P(x_2))$
- Quantoren nach vorne:  $\forall y_1 \exists x_1 \forall x_2 ((\neg R(x_1) \vee Q(y_1, a_z)) \wedge P(x_2))$

Skolemform:  $\forall y_1 \forall x_2 ((\neg R(f_{x_1}(y_1)) \vee Q(y_1, a_z)) \wedge P(x_2))$

Die Matrix der Formel ist bereits in KNF.

(b)  $F_b = \forall z(\exists y \neg(R(y) \vee \forall x R(x)) \vee \forall x Q(z, w))$

### Lösung

Bereinigen:  $\forall z_1(\exists y_1 \neg(R(y_1) \vee \forall x_1 R(x_1)) \vee \forall x_2 Q(z_1, w))$

Frei vorkommende Variablen ersetzen:  $\forall z_1(\exists y_1 \neg(R(y_1) \vee \forall x_1 R(x_1)) \vee \forall x_2 Q(z_1, a_w))$

Pränexform:

- Grundform mit  $\wedge, \vee, \neg$ : Die Formel ist bereits in Grundform.
- Reinziehen von  $\neg$ :  $\forall z_1(\exists y_1(\neg R(y_1) \wedge \exists x_1 \neg R(x_1)) \vee \forall x_2 Q(z_1, a_w))$
- Quantoren nach vorne:  $\forall z_1 \exists y_1 \exists x_1 \forall x_2 ((\neg R(y_1) \wedge \neg R(x_1)) \vee Q(z_1, a_w))$

Skolemform:  $\forall z_1 \forall x_2 ((\neg R(f_{y_1}(z_1)) \wedge \neg R(f_{x_1}(z_1))) \vee Q(z_1, a_w))$

Matrix in KNF:  $\forall z_1 \forall x_2 ((\neg R(f_{y_1}(z_1)) \vee Q(z_1, a_w)) \wedge (\neg R(f_{x_1}(z_1)) \vee Q(z_1, a_w)))$

### Aufgabe 3

Betrachten Sie die Struktur  $\mathcal{A}$  mit

- $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$  ist die Menge aller Punkte und Geraden im  $\mathbb{R}^2$ .
- $S_1^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ ist ein Punkt auf der Geraden } y.\}$
- $S_2^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind parallele Geraden.}\}$
- $S_3^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind orthogonale Geraden.}\}$
- $S_4^{\mathcal{A}} = \{(x, y, z) \mid x \text{ ist der Spiegelpunkt von } y \text{ bezüglich der Geraden } z.\}$

Formulieren Sie mit Hilfe der Prädikatenlogik die folgenden Aussagen (mit freien Variablen) in dieser Struktur:

- (a) Der Punkt  $x$  ist der einzige Schnittpunkt der Geraden  $y$  und  $z$ .

**Lösung**

Zwei Geraden in  $\mathbb{R}^2$  schneiden sich in genau einem Punkt genau dann, wenn sie nicht parallel sind. Damit ist die Formel  $(\neg S_2(y, z) \wedge S_1(x, y) \wedge S_1(x, z))$ .

- (b) Die Geraden  $x$ ,  $y$  und  $z$  schließen ein Dreieck ein.

**Lösung**

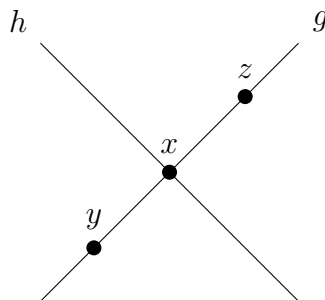
Drei Geraden in  $\mathbb{R}^2$  schließen ein Dreieck ein genau dann, wenn sie paarweise nicht parallel sind und sich nicht alle in einem Punkt schneiden. Die Formel ist

$$(\neg S_2(x, y) \wedge \neg S_2(x, z) \wedge \neg S_2(y, z) \wedge \neg \exists w(S_1(w, x) \wedge S_1(w, y) \wedge S_1(w, z))).$$

- (c) Der Punkt  $x$  ist Mittelpunkt der Strecke zwischen den Punkten  $y$  und  $z$ .

**Lösung**

Wir ziehen zunächst eine Gerade  $g$  durch  $y$  und  $z$ . Dann sind wir an einer Geraden  $h$  interessiert, die senkrecht zu  $g$  ist, sich in  $x$  mit  $g$  schneidet und  $y$  Spiegelpunkt von  $z$  bezüglich  $h$  ist.



Die Formel ist dann

$$\exists g \exists h (S_1(x, g) \wedge S_1(y, g) \wedge S_1(z, g) \wedge S_1(x, h) \wedge S_3(g, h) \wedge S_4(y, z, h)).$$

Man beachte, dass der Sonderfall, dass  $y$  und  $z$  gleich sind, und somit  $x = y = z$ , damit auch abgedeckt ist.