Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 11

Aufgabe 1
Zu einer Menge M von Aussagen in Skolemform schreiben wir $\mathcal{F}(M)$ für die Funktionssymbole, die in M vorkommen. Geben Sie zu den folgenden Formeln F jeweils $\mathcal{F}(\{F\})$, $D(\{F\})$ und $E(\{F\})$ an. Geben Sie anschließend eine unerfüllbare Formel $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_k)$ an mit $F_i \in E(F)$ für $1 \leq i \leq k$.

(a) $F_a = \forall x(P(x) \wedge \neg P(x))$

(b) $F_b = \forall x((P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg P(f(a)) \wedge Q(f(a)))$

(c) $F_c = \forall x \forall y((\neg P(x) \vee \neg P(f(y))) \wedge P(f(f(x))))$

Aufgabe 2
Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{R}})$ die Struktur über den reellen Zahlen mit den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ (analog zu Aufgabe 2 von Übungsblatt 7) und der Gleichheit $=$. Diese sollen alle die übliche Bedeutung haben, also $I_{\mathcal{R}}(+)(x, y) = x + y$ und $I_{\mathcal{R}}(\cdot)(x, y) = x \cdot y$. Bei dem Symbol $=$ gehen wir immer davon aus, dass es mit der Gleichheit interpretiert wird, also $I_{\mathcal{R}}(=) = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Formalisieren Sie folgende Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln:

(a) $x = 0$

(b) $x = 1$

(c) $x > 0$

(d) $x < y$

Aufgabe 3
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Eine Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell besitzt.

(b) Jede Formel ist äquivalent zu ihrer Skolemform.

(c) Es gibt unendlich viele paarweise nicht äquivalente Formeln über einer festen Menge von Prädikaten- und Funktionssymbolen.