# Übungsblatt 11

**Aufgabe 1**
Zu einer Menge $M$ von Aussagen in Skolemform schreiben wir $\mathcal{F}(M)$ für die Funktionssymbole, die in $M$ vorkommen. Geben Sie zu den folgenden Formeln $F$ jeweils $\mathcal{F}(\{F\})$, $D(\{F\})$ und $E(\{F\})$ an. Geben Sie anschließend eine unerfüllbare Formel $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_k)$ an mit $F_i \in E(F)$ für $1 \leq i \leq k$.

(a) $F_a = \forall x(P(x) \wedge \neg P(x))$

**Lösung**
Es gilt $\mathcal{F}(\{F_a\}) = \emptyset$. Wir erhalten also $D(\{F_a\}) = D(\emptyset \cup \{a\}) = \{a\}$. Man beachte, dass die fest gewählte Konstante $a$ hinzugenommen werden muss (siehe Folie 174), weil $\mathcal{F}(\{F_a\})$ keine Konstante enthält. Die Herbrand-Expansion von $\{F_a\}$ ist dann $E(\{F_a\}) = \{(P(a) \wedge \neg P(a))\}$. Die Formel $F_1 = (P(a) \wedge \neg P(a))$ ist unerfüllbar. Sei $\mathcal{B}$ eine zu $F_1$ passende Struktur mit $\mathcal{B} \models F_1$. Dann gilt auch, dass $\mathcal{B} \models P(a)$, aber somit auch $\mathcal{B} \not\models \neg P(a)$, also $\mathcal{B} \not\models F_1$, was ein Widerspruch ist.

(b) $F_b = \forall x((P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg P(f(a)) \wedge Q(f(a)))$

**Lösung**
Es gilt $\mathcal{F}(\{F_b\}) = \{a, f\}$. Damit erhalten wir, dass

$$D(\{F_b\}) = D(\{f, a\}) = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Herbrand-Expansion ist dann

$$E(\{F_b\}) = \{((P(f^n(a)) \vee \neg Q(f^n(a))) \wedge \neg P(f(a)) \wedge Q(f(a))) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Mit $n = 1$ erhalten wir die unerfüllbare Formel

$$F_1 = ((P(f(a)) \vee \neg Q(f(a))) \wedge \neg P(f(a)) \wedge Q(f(a))).$$

Sei $\mathcal{B}$ eine zu $F_1$ passende Struktur mit $\mathcal{B} \models F_1$, also $\mathcal{B} \models (P(f(a)) \vee \neg Q(f(a)))$. Daraus folgt, dass $\mathcal{B} \models P(f(a))$ oder $\mathcal{B} \models \neg Q(f(a))$. Im ersten Fall gilt dann $\mathcal{B} \not\models \neg P(f(a))$. Im zweiten Fall gilt $\mathcal{B} \not\models Q(f(a))$. Also gilt, dass $\mathcal{B} \not\models F_1$, was ein Widerspruch ist.

(c) $F_c = \forall x \forall y((\neg P(x) \vee \neg P(f(y))) \wedge P(f(f(x))))$

**Lösung**
Es gilt, dass $\mathcal{F}(\{F_c\}) = \{f\}$. Wir müssen hier wieder die fest gewählte Konstante $a$ hinzunehmen, also erhalten wir

$$D(\{F_c\}) = D(\{f\} \cup \{a\}) = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Herbrand-Expansion ist dann

$$E(\{F_c\}) = \{((\neg P(f^n(a)) \vee \neg P(f^{m+1}(a))) \wedge P(f^{n+2}(a))) \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Mit $n = 2, m = 1$ und $n = 0, m = 0$ erhalten wir die Formeln

$$\begin{aligned} F_1 &= ((\neg P(f^2(a)) \vee \neg P(f^2(a))) \wedge P(f^4(a))), \\ F_2 &= ((\neg P(a) \vee \neg P(f(a))) \wedge P(f^2(a))). \end{aligned}$$

Dann ist die Formel $F = (F_1 \wedge F_2)$ unerfüllbar. Sei $\mathcal{B}$ eine zu $F$ passende Struktur mit $\mathcal{B} \models F$. Also gilt auch $\mathcal{B} \models F_2$, und somit auch $\mathcal{B} \models P(f^2(a))$. Daraus folgt aber, dass $\mathcal{B} \not\models \neg P(f^2(a))$, also $\mathcal{B} \not\models F_1$ und somit $\mathcal{B} \not\models F$, was ein Widerspruch ist.

**Aufgabe 2**
Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, I_\mathcal{R})$ die Struktur über den reellen Zahlen mit den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ (analog zu Aufgabe 2 von Übungsblatt 7) und der Gleichheit $=$. Diese sollen alle die übliche Bedeutung haben, also $I_\mathcal{R}(+)(x, y) = x + y$ und $I_\mathcal{R}(\cdot)(x, y) = x \cdot y$. Bei dem Symbol $=$ gehen wir immer davon aus, dass es mit der Gleichheit interpretiert wird, also $I_\mathcal{R}(=) = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Formalisieren Sie folgende Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln:

(a) $x = 0$

**Lösung**
$\forall y\ x \cdot y = x$

(b) $x = 1$

**Lösung**
$\forall y\ x \cdot y = y$

(c) $x > 0$

**Lösung**
$(\exists y\ x = y \cdot y \wedge \neg x = 0)$

Hier müssen wir für $x = 0$ die Formel aus Teilaufgabe a einsetzen. Wir erhalten also

$$(\exists y\ x = y \cdot y \wedge \neg \forall y\ x \cdot y = x).$$

(d) $x < y$

**Lösung**
$\exists z(z > 0 \land x + z = y)$

Hier müssen wir für $z > 0$ die Formel aus Teilaufgabe c einsetzen. Wir erhalten also

$$\exists z((\exists y\ z = y \cdot y \land \neg\forall y\ z \cdot y = z) \land x + z = y).$$

**Aufgabe 3**
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Eine Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell besitzt.

**Lösung**
Wahr. Wenn $F$ ein Herbrand-Modell besitzt, so ist $F$ auch erfüllbar. Sei $F$ nun erfüllbar. Dann ist die Skolemform $F'$ von $F$ auch erfüllbar. Deswegen besitzt $F'$ ein Herbrand-Modell. Nach der Bemerkung auf Folie 161 gilt, dass dieses Herbrand-Modell sogar ein Modell von $F$ ist.

(b) Jede Formel ist äquivalent zu ihrer Skolemform.

**Lösung**
Falsch. Es gilt $\exists x P(x) \not\equiv P(a)$, denn für $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $a^\mathcal{A} = 0$ und $P^\mathcal{A} = \{1\}$ gilt, dass $\mathcal{A} \models \exists x P(x)$, aber $\mathcal{A} \not\models P(a)$.

(c) Es gibt unendlich viele paarweise nicht äquivalente Formeln über einer festen Menge von Prädikaten- und Funktionssymbolen.

**Lösung**
Im Fall, dass man kein Prädikatensymbol zur Verfügung hat, stimmt dies nicht, da man dann keine Formeln bilden kann. Sei nun $P$ ein einstelliges Prädikatensymbol. Dann sind die Formeln $P(x_1), P(x_2), \ldots$ alle paarweise nicht äquivalent: Seien $P(x_i)$ und $P(x_j)$ mit $i \neq j$ zwei dieser Formeln und sei $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0, 1\}$ mit $x_i^\mathcal{A} = 0$, $x_j^\mathcal{A} = 1$ und $P^\mathcal{A} = \{0\}$. Dann gilt $\mathcal{A} \models P(x_i)$, aber $\mathcal{A} \not\models P(x_j)$. Für mehrstellige Prädikatensymbole ist die Argumentation ähnlich.