Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Logik I
WS 2020/21

Übungsblatt 12

Aufgabe 1
Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die folgenden Literalmengen an.

Lösung
Wir schreiben $\emptyset$ für die Substitution sub mit $\mathrm{Def}(\mathrm{sub}) = \emptyset$. Das heißt also, dass sub keine Ersetzungen vornimmt. Außerdem schreiben wir $[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ für die Substitution sub mit $\mathrm{Def}(\mathrm{sub}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\mathrm{sub}(x_i) = t_i$ für $1 \leq i \leq n$, wobei $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene Variablen und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind.

(a) $L_a = \{P(f(x), g(f(y))), P(f(g(z)), g(w))\}$

Lösung
Wir starten mit $\mathrm{sub} = \emptyset$. Danach wählen wir in jedem Schritt zwei Elemente aus $L_a\mathrm{sub}$. Diese gehen wir zeichenweise von links nach rechts durch, bis wir das erste Symbol finden, an denen sich die beiden unterscheiden. Um diese Positionen hervorzuheben, markieren wir sie mit einem $\uparrow$.

- Wähle $P(f(\underset{\uparrow}{x}), g(f(y)))$ und $P(f(\underset{\uparrow}{g}(z)), g(w))$. Wir erhalten $\mathrm{sub} := \mathrm{sub}[x/g(z)]$ und $L_a\mathrm{sub} = \{P(f(g(z)), g(f(y))), P(f(g(z)), g(w))\}$.
- Wähle $P(f(g(z)), g(\underset{\uparrow}{f}(y)))$ und $P(f(g(z)), g(\underset{\uparrow}{w}))$. Wir erhalten also, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{sub} &:= \mathrm{sub}[w/f(y)] = [x/g(z), w/f(y)] \text{ und} \\ L_a\mathrm{sub} &= \{P(f(g(z)), g(f(y)))\}. \end{aligned}$$

Da nun $|L_a\mathrm{sub}| = 1$, ist die Unifikation fertig.

(b) $L_b = \{P(x, f(x)), P(f(y), y)\}$

Lösung
$\mathrm{sub} = \emptyset$.

- $P(\underset{\uparrow}{x}, f(x))$ und $P(\underset{\uparrow}{f}(y), y)$,
  $\mathrm{sub} := \mathrm{sub}[x/f(y)]$,
  $L_b\mathrm{sub} = \{P(f(y), f(f(y))), P(f(y), y)\}$.
- $P(f(y), \underset{\uparrow}{f}(f(y)))$ und $P(f(y), \underset{\uparrow}{y})$.
  Da y in $f(f(y))$ vorkommt, ist die Menge nicht unifizierbar.

(c) $L_c = \{P(f(x), g(x)), P(y, g(f(z))), P(w, g(x))\}$

Lösung
sub $= \emptyset$.

- $P(\underset{\uparrow}{y}, g(f(z)))$ und $P(\underset{\uparrow}{w}, g(x))$,
  sub $:=$ sub$[y/w]$,
  $L_c\text{sub} = \{P(f(x), g(x)), P(w, g(f(z))), P(w, g(x))\}$.
- $P(w, g(\underset{\uparrow}{f}(z)))$ und $P(w, g(\underset{\uparrow}{x}))$,
  sub $:=$ sub$[x/f(z)] = [y/w, x/f(z)]$,
  $L_c\text{sub} = \{P(f(f(z)), g(f(z))), P(w, g(f(z)))\}$.
- $P(\underset{\uparrow}{f}(f(z)), g(f(z)))$ und $P(\underset{\uparrow}{w}, g(f(z)))$,
  sub $:=$ sub$[w/f(f(z))] = [y/f(f(z)), x/f(z), w/f(f(z))]$,
  $L_c\text{sub} = \{P(f(f(z)), g(f(z)))\}$.

Da nun $|L_c\text{sub}| = 1$, ist die Unifikation fertig.

(d) $L_d = \{P(x), P(f(y)), P(g(z))\}$

Lösung
sub $= \emptyset$.

- $P(\underset{\uparrow}{f}(y))$ und $P(\underset{\uparrow}{g}(z))$.
  Keines der beiden Symbole ist eine Variable, also ist die Menge nicht unifizierbar.

Aufgabe 2
Die *Verknüpfung* $s_1 s_2$ von zwei Substitutionen s_1 und s_2 ist definiert als $t(s_1 s_2) := (ts_1)s_2$, wobei t ein beliebiger Term ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung ein Monoid ist.

Lösung
Sei $e = \emptyset$. Es gilt, dass $te = t$ für jeden Term t. Somit ist e das neutrale Element der Verknüpfung, denn $t(se) = (ts)e = ts$ und $t(es) = (te)s = ts$ für alle Substitutionen s und Terme t.

Die Verknüpfung ist außerdem assoziativ. Seien s_1, s_2 und s_3 Substitutionen und t ein Term. Dann gilt

$$t((s_1 s_2)s_3) = (t(s_1 s_2))s_3 = ((ts_1)s_2)s_3 = (ts_1)(s_2 s_3) = t(s_1(s_2 s_3)).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung nicht kommutativ ist.

Lösung
Sei $s_1 = [x/y]$ und $s_2 = [y/z]$. Es gilt $(s_1 s_2)(x) = z$, aber $(s_2 s_1)(x) = y$.