Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass 3-COLORABILITY **NP**-vollständig ist: Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Gibt es eine Funktion $\phi\colon V \to \{1, 2, 3\}$ mit $\phi(u) \neq \phi(v)$, wenn u und v durch eine Kante verbunden sind?

Aufgabe 2.

(a) Sei DNF-SAT die Menge der erfüllbaren aussagenlogischen Formeln, die in disjunktiver Normalform sind. Geben Sie einen Algorithmus an, der zu einer gegebenen boolschen Formel F in deterministisch polynomieller Zeit überprüft, ob $F \in$ DNF-SAT gilt.

(b) Es sei $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$ eine aussagenlogische Formel, $F \in$ 3-KNF mit der Einschränkung, dass in keiner Klausel eine Variable doppelt vorkommt. Beweisen Sie die folgende Aussage: Es gibt eine Belegung der Variablen von F, so dass mindestens 7/8 der Klauseln von F erfüllt sind.
Hinweis. Definieren Sie zunächst für eine Belegung der Variablen σ die Funktionen $\chi_i(F, \sigma)$:

$$\chi_i(F, \sigma) = \begin{cases} 0 & \text{falls } C_i \text{ falsch bei Belegung } \sigma \\ 1 & \text{falls } C_i \text{ wahr bei Belegung } \sigma \end{cases}$$

Berechnen Sie dann den Erwartungswert der Funktion

$$X = \sum_{i=1}^{m} \chi_i(F, \sigma).$$

Aufgabe 3. Sei HC das Hamiltonkreisproblem für ungerichtete Graphen und DHC das Hamiltonkreisproblem für gerichtete Graphen. Zeigen Sie, dass beide Probleme gleich schwer sind, d.h. reduzieren Sie HC auf DHC in Polynomialzeit und umgekehrt.

Aufgabe 4. Geben Sie eine Logspace-Reduktion von 2-COLORABILITY auf 2-SAT an.