

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Beantworten Sie folgende Fragen durch Anwenden des Markierungsalgorithmus: (Hinweis: Wir lassen einige der Klammern zwecks besserer Lesbarkeit weg.)

(a) Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar?

$$(1) (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge \neg C \wedge A \wedge D \wedge (\neg D \vee B)$$

$$(2) (C \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee D \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E \vee F) \wedge A \wedge \neg F$$

(b) Welche der folgenden Formeln sind gültig?

$$(1) (\neg B \wedge C) \vee C \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee \neg A$$

$$(2) (A \wedge D \wedge \neg I) \vee (B \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge H) \vee (\neg E \wedge F) \vee (\neg C \wedge F) \vee (G \wedge \neg H) \vee \neg B \vee \neg F \vee \neg G \vee I$$

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$$(1) \neg C \vee \neg D \vee E, A, \neg A \vee C \vee \neg B \models E \vee \neg B$$

$$(2) A \vee \neg B \vee \neg D, \neg B \vee \neg G \vee F, \neg A \vee E \vee \neg C \vee \neg F, B, D \models E \vee \neg G \vee (\neg C \wedge D)$$

Aufgabe 2

Seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2: \{A_1, \dots, A_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ zwei Belegungen. Wir schreiben $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ genau dann, wenn für alle $A \in \{A_1, \dots, A_n\}$ gilt: Wenn $\mathcal{B}_1(A) = 1$, dann auch $\mathcal{B}_2(A) = 1$. Außerdem sei $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2): \{A_1, \dots, A_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ definiert als

$$\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{B}_1(A) = 1 \text{ und } \mathcal{B}_2(A) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei F eine Formel über den atomaren Formeln $\{A_1, \dots, A_n\}$. Wir nennen ein Modell $\mathcal{B}: \{A_1, \dots, A_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ für F *kleinstes Modell für F* , wenn für alle anderen Modelle $\mathcal{B}': \{A_1, \dots, A_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ für F gilt, dass $\mathcal{B} \leq \mathcal{B}'$.

(a) Zeigen Sie, dass $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \leq \mathcal{B}_1$ und $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \leq \mathcal{B}_2$ für zwei beliebige Belegungen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2: \{A_1, \dots, A_n\} \rightarrow \{0, 1\}$.

(b) Sei F eine Hornformel mit atomaren Formeln $\{A_1, \dots, A_n\}$. Zeigen Sie, dass für alle $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2: \{A_1, \dots, A_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ gilt: Wenn $\mathcal{B}_1 \models F$ und $\mathcal{B}_2 \models F$, dann gilt auch $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \models F$.

- (c) Geben Sie eine Formel an, zu der keine äquivalente Hornformel existiert.
- (d) Zeigen Sie, dass jede erfüllbare Hornformel F ein kleinstes Modell besitzt.
- (e) Ändern Sie den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung so ab, dass er Folgendes tut: Die Eingabe ist nach wie vor eine Hornformel F . Wenn F unerfüllbar ist, dann gib „unerfüllbar“ aus. Wenn F erfüllbar ist, dann liefere das kleinste Modell von F .