

# Übungsblatt 11

## Aufgabe 1

Zu einer Menge  $M$  von Aussagen in Skolemform schreiben wir  $\mathcal{F}(M)$  für die Funktionssymbole, die in  $M$  vorkommen. Geben Sie zu den folgenden Formeln  $F$  jeweils  $\mathcal{F}(\{F\})$ ,  $D(\{F\})$  und  $E(\{F\})$  an. Geben Sie anschließend eine unerfüllbare Formel  $(F_1 \wedge \dots \wedge F_k)$  an mit  $F_i \in E(F)$  für  $1 \leq i \leq k$ .

- (a)  $F_a = \forall x(P(x) \wedge \neg P(x))$
- (b)  $F_b = \forall x((P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg P(f(a)) \wedge Q(f(a)))$
- (c)  $F_c = \forall x \forall y((\neg P(x) \vee \neg P(f(y))) \wedge P(f(f(x))))$

## Aufgabe 2

Sei  $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{R}})$  die Struktur über den reellen Zahlen mit den zweistelligen Funktionssymbolen  $+$  und  $\cdot$  (analog zu Aufgabe 2 von Übungsblatt 7) und der Gleichheit  $=$ . Diese sollen alle die übliche Bedeutung haben, also  $I_{\mathcal{R}}(+)(x, y) = x + y$  und  $I_{\mathcal{R}}(\cdot)(x, y) = x \cdot y$ . Bei dem Symbol  $=$  gehen wir immer davon aus, dass es mit der Gleichheit interpretiert wird, also  $I_{\mathcal{R}}(=) = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

Formalisieren Sie folgende Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln:

- (a)  $x = 0$
- (b)  $x = 1$
- (c)  $x > 0$
- (d)  $x < y$

## Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- (a) Eine Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell besitzt.
- (b) Jede Formel ist äquivalent zu ihrer Skolemform.
- (c) Es gibt unendlich viele paarweise nicht äquivalente Formeln über einer festen Menge von Prädikaten- und Funktionssymbolen.