Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 6

Aufgabe 1.

(a) Sei DNF-SAT die Menge der erfüllbaren aussagenlogischen Formeln, die in disjunktiver Normalform sind. Geben Sie einen Algorithmus an, der zu einer gegebenen aussagenlogischen Formel F in deterministisch polynomieller Zeit überprüft, ob $F \in$ DNF-SAT gilt.

(b) Es sei $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$ eine aussagenlogische Formel, $F \in$ 3-KNF mit der Einschränkung, dass in keiner Klausel eine Variable doppelt vorkommt. Beweisen Sie die folgende Aussage: Es gibt eine Belegung der Variablen von F, so dass mindestens 7/8 der Klauseln von F erfüllt sind.
Hinweis: Sei n die Anzahl der Variablen von F. Mit $\mathcal{B}$ bezeichnen wir eine Belegung der Variablen, d.h. $\mathcal{B}$ ordnet jeder der n Variablen aus F einen Wahrheitswert 0 oder 1 zu. Für eine solche Belegung $\mathcal{B}$ definieren wir die Funktionen

$$\chi_i(F, \mathcal{B}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } C_i \text{ falsch bei Belegung } \mathcal{B} \\ 1 & \text{falls } C_i \text{ wahr bei Belegung } \mathcal{B} \end{cases}$$

sowie die Funktion

$$\chi(F, \mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{m} \chi_i(F, \mathcal{B}).$$

Sei weiterhin $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{2^n}$ eine Aufzählung aller Belegungen der n Variablen. Berechnen Sie den Erwartungswert

$$\mu = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{m} \chi_j(F, \mathcal{B}_i).$$

Aufgabe 2. Sei HC das Hamiltonkreisproblem für ungerichtete Graphen und DHC das Hamiltonkreisproblem für gerichtete Graphen. Zeigen Sie, dass beide Probleme gleich schwer sind, d.h. reduzieren Sie HC auf DHC in Polynomialzeit und umgekehrt.

Aufgabe 3. (Wiederholung) Welche Klassen sind Teilmengen bzw. echte Teilmengen welcher anderen Klassen?

(a) $\mathbf{L}, \mathbf{coNL}, \mathbf{NL}, \mathrm{DSPACE}(\log^4(n)), \mathbf{co}\mathrm{DSPACE}(\log(n^5))$

(b) $\mathbf{NL}, \mathbf{P}, \mathrm{DTIME}(n^2), \mathbf{NEXP}, \mathbf{EXP}, \mathrm{NTIME}(n!)$

(c) $\mathbf{NP}, \mathrm{NSPACE}(3n^5 + n^4 + 1), \mathbf{NPSPACE}, \mathbf{PSPACE}$