Übungsblatt 9

Aufgabe 1
Zeigen Sie folgende Behauptungen für beliebige Formeln F und G.

(a) $(\exists xF \vee \exists xG) \equiv \exists x(F \vee G)$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die zu F und G passend. Gelte außerdem $\mathcal{A} \models (\exists xF \vee \exists xG)$. Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Im ersten Fall gilt $\mathcal{A} \models \exists xF$. Daraus folgt, dass es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$. Das heißt auch, dass es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder dass es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Also gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Das heißt, es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \vee G)$, also $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$. Der zweite Fall, also $\mathcal{A} \models \exists xG$, ist analog.

Gelte nun $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$. Das heißt, es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \vee G)$. Somit gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Es gibt also ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Also folgt $\mathcal{A} \models \exists xF$ oder $\mathcal{A} \models \exists xG$. Insgesamt folgt dann auch $\mathcal{A} \models (\exists xF \vee \exists xG)$.

(b) $(\exists xF \wedge \exists xG) \not\equiv \exists x(F \wedge G)$

Lösung
Sei $F = P(x)$ und $G = Q(x)$. Sei außerdem $\mathcal{B}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0, 1\}$ mit $P^\mathcal{B} = \{0\}$ und $Q^\mathcal{B} = \{1\}$. Es gilt $\mathcal{B} \models \exists xP(x)$ und $\mathcal{B} \models \exists xQ(x)$, also $\mathcal{B} \models (\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x))$. Auf der anderen Seite gilt $\mathcal{B}_{[x/0]} \not\models Q(x)$ und $\mathcal{B}_{[x/1]} \not\models P(x)$. Das heißt, es gibt kein $d \in \{0, 1\}$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]} \models P(x)$ und $\mathcal{B}_{[x/d]} \models Q(x)$. Also es gibt kein $d \in \{0, 1\}$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]} \models (P(x) \wedge Q(x))$. Daraus folgt, dass $\mathcal{B} \not\models \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

(c) $\forall xF \equiv \neg\exists x\neg F$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine zu F passende Struktur. Es gilt $\mathcal{A} \models \neg\exists x\neg F$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \not\models \exists x\neg F$. Dies gilt genau dann, wenn es kein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models \neg F$. Dies gilt genau dann, wenn es kein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \not\models F$. Dies wiederum gilt genau dann, wenn für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gilt, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$. Dies gilt genau dann, wenn $\mathcal{A} \models \forall xF$.

(d) $\forall x\exists yF \not\equiv \exists x\forall yF$

Lösung
Sei $F = R(x, y)$. Sei außerdem $\mathcal{B}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0, 1\}$ mit $R^\mathcal{B} = \{(0, 1), (1, 0)\}$. Es gilt $\mathcal{B} \models \forall x\exists yR(x, y)$, denn $\mathcal{B}_{[x/0][y/1]} \models R(x, y)$ und $\mathcal{B}_{[x/1][y/0]} \models R(x, y)$. Es gilt aber nicht $\mathcal{B} \models \exists x\forall yR(x, y)$, weil $\mathcal{B}_{[x/0][y/0]} \not\models R(x, y)$ und $\mathcal{B}_{[x/1][y/1]} \not\models R(x, y)$.

Aufgabe 2
Geben Sie für jede der folgenden Formeln zunächst eine zu ihr äquivalente BPF an. Überführen Sie diese anschließend in Skolemform.

Lösung
Der Beweis zum Satz auf Folie 144 (Für jede Formel gibt es eine äquivalente Formel in BPF) wurde mit Induktion über den Formelaufbau geführt. Wir verwenden hier stattdessen einen globalen Ansatz, um die BPF herzustellen.

(a)

$$F = \Big(\forall x \exists y \big(R(x,y) \rightarrow \exists r R(r, f(y,z))\big) \wedge \forall x \neg \exists z \big(P(z) \wedge \forall w R(x,w)\big)\Big)$$

Lösung
Zunächst benennen wir alle gebundenen Variablen um. Ein einfacher Ansatz ist, diese durchzunummerieren, also aus x wird x_1, x_2, usw.

$$F \equiv \Big(\forall x_1 \exists y_1 \big(R(x_1,y_1) \rightarrow \exists r_1 R(r_1, f(y_1,z))\big) \wedge \forall x_2 \neg \exists z_1 \big(P(z_1) \wedge \forall w_1 R(x_2,w_1)\big)\Big)$$

Als Nächstes ersetzen wir alle syntaktischen Abkürzungen wie $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ durch die Basissyntax, die nur $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ verwendet.

$$F \equiv \Big(\forall x_1 \exists y_1 \big(\neg R(x_1,y_1) \vee \exists r_1 R(r_1, f(y_1,z))\big) \wedge \forall x_2 \neg \exists z_1 \big(P(z_1) \wedge \forall w_1 R(x_2,w_1)\big)\Big)$$

Quantoren lassen sich einfach über $\wedge$ und $\vee$ ziehen, aber nicht über $\neg$. Deshalb schieben wir die $\neg$ so weit nach innen, dass sie nur noch unter, aber nicht über Quantoren vorkommen. Dazu verwenden wir die Äquivalenzen $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$ und $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$, wobei F eine beliebige Formel ist.

$$F \equiv \Big(\forall x_1 \exists y_1 \big(\neg R(x_1,y_1) \vee \exists r_1 R(r_1, f(y_1,z))\big) \wedge \forall x_2 \forall z_1 \big(\neg P(z_1) \vee \exists w_1 \neg R(x_2,w_1)\big)\Big)$$

Wie bereits besprochen, lassen sich dann die Quantoren einfach nach vorne ziehen:

$$F \equiv \forall x_1 \exists y_1 \exists r_1 \forall x_2 \forall z_1 \exists w_1 \Big(\big(\neg R(x_1,y_1) \vee R(r_1, f(y_1,z))\big) \wedge \big(\neg P(z_1) \vee \neg R(x_2,w_1)\big)\Big)$$

Der Algorithmus zum Herstellen der Skolemform auf Folie 149 ist auch induktiv formuliert. Wir verwenden auch hier wieder einen globalen Ansatz und führen alle Ersetzungen der $\exists$ parallel aus.

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall z_1 \Big(\big(\neg R(x_1, f_{y_1}(x_1)) \vee R(f_{r_1}(x_1), f(f_{y_1}(x_1), z))\big) \wedge \big(\neg P(z_1) \vee \neg R(x_2, f_{w_1}(x_1,x_2,z_1))\big)\Big)$$

(b)

$$\begin{aligned} G = \Big(&\forall x \exists y \forall z \big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)\big) \\ &\wedge \forall x \neg R(x,x) \wedge \exists x \forall y (x \neq y \rightarrow R(y,x)) \wedge \forall x \exists y R(y,x)\Big) \end{aligned}$$

Lösung

Umbenennen aller Quantoren:

$$\begin{aligned} G \equiv \Big(&\forall x_1 \exists y_1 \forall z_1 \big((R(x_1, y_1) \land R(y_1, z_1)) \to R(x_1, z_1)\big) \\ &\land \forall x_2 \neg R(x_2, x_2) \land \exists x_3 \forall y_2 (x_3 \neq y_2 \to R(y_2, x_3)) \land \forall x_4 \exists y_3 R(y_3, x_4)\Big) \end{aligned}$$

Umwandeln in Grundform mit $\land$, $\lor$, $\neg$:

$$\begin{aligned} G \equiv \Big(&\forall x_1 \exists y_1 \forall z_1 \big((\neg R(x_1, y_1) \lor \neg R(y_1, z_1)) \lor R(x_1, z_1)\big) \\ &\land \forall x_2 \neg R(x_2, x_2) \land \exists x_3 \forall y_2 (x_3 = y_2 \lor R(y_2, x_3)) \land \forall x_4 \exists y_3 R(y_3, x_4)\Big) \end{aligned}$$

Quantoren nach vorne ziehen:

$$\begin{aligned} G \equiv \forall x_1 \exists y_1 \forall z_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall y_2 \forall x_4 \exists y_3 \Big(&\big((\neg R(x_1, y_1) \lor \neg R(y_1, z_1)) \lor R(x_1, z_1)\big) \\ &\land \neg R(x_2, x_2) \land (x_3 = y_2 \lor R(y_2, x_3)) \land R(y_3, x_4)\Big) \end{aligned}$$

Umwandeln in Skolemform:

$$\begin{aligned} \forall x_1 \forall z_1 \forall x_2 \forall y_2 \forall x_4 \Big(&\big((\neg R(x_1, f_{y_1}(x_1)) \lor \neg R(f_{y_1}(x_1)), z_1)) \lor R(x_1, z_1)\big) \\ &\land \neg R(x_2, x_2) \\ &\land (f_{x_3}(x_1, z_1, x_2) = y_2 \lor R(y_2, f_{x_3}(x_1, z_1, x_2))) \\ &\land R(f_{y_3}(x_1, z_1, x_2, y_2, x_4), x_4)\Big) \end{aligned}$$