Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 10

Aufgabe 1
Überführen Sie die folgenden Formeln jeweils in eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage in Klauselform, indem Sie wie auf Folie 165 beschrieben vorgehen:

Lösung
Im letzten Übungsblatt haben wir bereits Formeln zunächst in BPF und anschließend in Skolemform überführt. Zusätzlich dazu müssen wir nun zwei weitere Dinge tun: Wir müssen eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage herstellen. Eine Aussage darf keine freien Variablen enthalten, was wir dadurch erreichen, dass wir jede freie Variable durch eine neue Konstante ersetzen. Außerdem muss die neue Formel in Klauselform sein. Das heißt, ihre Matrix (die Formel ohne Quantoren) muss in KNF sein.

(a) $F_a = (\forall y(\forall x R(x) \to Q(y,z)) \land \forall x P(x))$

Lösung
Bereinigen: $(\forall y_1(\forall x_1 R(x_1) \to Q(y_1,z)) \land \forall x_2 P(x_2))$

Frei vorkommende Variablen ersetzen: $(\forall y_1(\forall x_1 R(x_1) \to Q(y_1,a_z)) \land \forall x_2 P(x_2))$

Pränexform:

- Grundform mit $\land$,$\lor$,$\neg$: $(\forall y_1(\neg\forall x_1 R(x_1) \lor Q(y_1,a_z)) \land \forall x_2 P(x_2))$
- Reinziehen von $\neg$: $(\forall y_1(\exists x_1 \neg R(x_1) \lor Q(y_1,a_z)) \land \forall x_2 P(x_2))$
- Quantoren nach vorne: $\forall y_1 \exists x_1 \forall x_2((\neg R(x_1) \lor Q(y_1,a_z)) \land P(x_2))$

Skolemform: $\forall y_1 \forall x_2((\neg R(f_{x_1}(y_1)) \lor Q(y_1,a_z)) \land P(x_2))$

Die Matrix der Formel ist bereits in KNF.

(b) $F_b = \forall z(\exists y \neg(R(y) \lor \forall x R(x)) \lor \forall x Q(z,w))$

Lösung
Bereinigen: $\forall z_1(\exists y_1 \neg(R(y_1) \lor \forall x_1 R(x_1)) \lor \forall x_2 Q(z_1,w))$

Frei vorkommende Variablen ersetzen: $\forall z_1(\exists y_1 \neg(R(y_1) \lor \forall x_1 R(x_1)) \lor \forall x_2 Q(z_1,a_w))$

Pränexform:

- Grundform mit $\land$,$\lor$,$\neg$: Die Formel ist bereits in Grundform.
- Reinziehen von $\neg$: $\forall z_1(\exists y_1(\neg R(y_1) \land \exists x_1 \neg R(x_1)) \lor \forall x_2 Q(z_1,a_w))$
- Quantoren nach vorne: $\forall z_1 \exists y_1 \exists x_1 \forall x_2((\neg R(y_1) \land \neg R(x_1)) \lor Q(z_1,a_w))$

Skolemform: $\forall z_1 \forall x_2((\neg R(f_{y_1}(z_1)) \wedge \neg R(f_{x_1}(z_1))) \vee Q(z_1, a_w))$

Matrix in KNF: $\forall z_1 \forall x_2((\neg R(f_{y_1}(z_1)) \vee Q(z_1, a_w)) \wedge (\neg R(f_{x_1}(z_1)) \vee Q(z_1, a_w)))$

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Struktur $\mathcal{A}$ mit

- $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ ist die Menge aller Punkte und Geraden im $\mathbb{R}^2$.
- ${S_1}^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ ist ein Punkt auf der Geraden } y.\}$
- ${S_2}^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind parallele Geraden.}\}$
- ${S_3}^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind orthogonale Geraden.}\}$
- ${S_4}^{\mathcal{A}} = \{(x, y, z) \mid x \text{ ist der Spiegelpunkt von } y \text{ bezüglich der Geraden } z.\}$

Formulieren Sie mit Hilfe der Prädikatenlogik die folgenden Aussagen (mit freien Variablen) in dieser Struktur:

(a) Der Punkt x ist der einzige Schnittpunkt der Geraden y und z.

Lösung

Zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$ schneiden sich in genau einem Punkt genau dann, wenn sie nicht parallel sind. Damit ist die Formel $(\neg S_2(y, z) \wedge S_1(x, y) \wedge S_1(x, z))$.

(b) Die Geraden x, y und z schließen ein Dreieck ein.

Lösung

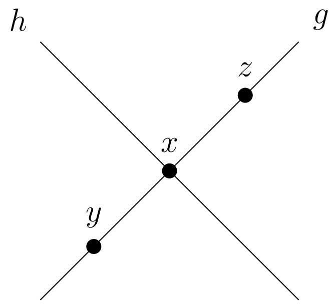
Drei Geraden in $\mathbb{R}^2$ schließen ein Dreieck ein genau dann, wenn sie paarweise nicht parallel sind und sich nicht alle in einem Punkt schneiden. Die Formel ist

$$(\neg S_2(x, y) \wedge \neg S_2(x, z) \wedge \neg S_2(y, z) \wedge \neg \exists w(S_1(w, x) \wedge S_1(w, y) \wedge S_1(w, z))).$$

(c) Der Punkt x ist Mittelpunkt der Strecke zwischen den Punkten y und z.

Lösung

Wir ziehen zunächst eine Gerade g durch y und z. Dann sind wir an einer Geraden h interessiert, die senkrecht zu g ist, sich in x mit g schneidet und y Spiegelpunkt von z bezüglich h ist.



Die Formel ist dann

$$\exists g \exists h \big(S_1(x, g) \land S_1(y, g) \land S_1(z, g) \land S_1(x, h) \land S_3(g, h) \land S_4(y, z, h) \big).$$

Man beachte, dass der Sonderfall, dass y und z gleich sind, und somit $x = y = z$, damit auch abgedeckt ist.

Aufgabe 3
Definieren Sie die Substitution $F[x/t]$ formal (siehe Folie 141), wobei F eine Formel, x eine Variable und t ein Term ist.

Lösung
Wir definieren zunächst Substitution auf Termen: Sei y eine Variable. Dann ist

$$y[x/t] = \begin{cases} t, & \text{falls } x = y, \\ y, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Sei f ein n-stelliges Funktionssymbol und $t_1, \ldots, t_n$ Terme. Dann ist

$$f(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t]).$$

Für Formeln gehen wir dann wie folgt vor: Sei $F = R(t_1, \ldots, t_n)$, wobei R ein n-stelliges Relationssymbol und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind. Dann ist

$$R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t]).$$

Sei $F = (G \land H)$, wobei G und H Formeln sind. Dann ist $(G \land H)[x/t] = (G[x/t] \land H[x/t])$.
Der Fall für $\lor$ ist analog, also $(G \lor H)[x/t] = (G[x/t] \lor H[x/t])$.
Sei $F = \neg G$, wobei G eine Formel ist. Dann ist $\neg G[x/t] = \neg(G[x/t])$. Die Klammern dienen hier nur dazu, deutlich zu machen, worauf die Substitution angewandt wird. Sie sind nicht Teil der Syntax.
Sei $F = QyG$, wobei G eine Formel, $Q \in \{\forall, \exists\}$ und y eine Variable ist. Dann ist

$$QyG[x/t] = \begin{cases} QyG, & \text{falls } x = y, \\ Qy(G[x/t]), & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Die Klammern sind auch hier nicht Teil der Syntax.