Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 12

Aufgabe 1
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es existiert eine erfüllbare Formel F, sodass jedes Modell für F ein überabzählbar unendliches Universum besitzt.

Lösung
Falsch: Nach dem Satz von Löwenheim und Skolem (Folie 173) besitzt jede erfüllbare Menge von Aussagen der Prädikatenlogik ein Modell mit einem abzählbaren Universum, d.h. es gibt keine erfüllbare Aussage F, sodass jedes Modell für F ein überabzählbar unendliches Universum besitzt.

Ist F eine erfüllbare Formel mit freien Variablen (d.h. keine Aussage), so können wir F zunächst in eine erfüllbarkeitsequivalente Aussage F' umwandeln, wie auf Folie 165 beschrieben: Sind $y_1, \ldots, y_n$ die freien Variablen aus F, dann ist $F' = F[y_1/a_1, \ldots, y_n/a_n]$, wobei $a_1, \ldots, a_n$ verschiedene Konstanten sind, die nicht in F vorkommen. Da F' dann eine erfüllbare Aussage ist, gibt es nach dem Satz von Löwenheim und Skolem ein Modell $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ für F' mit abzählbarem Universum. Wir erhalten aus $\mathcal{A}$ ein Modell $\mathcal{B} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{B})$ für F (mit dem gleichen Universum $U_\mathcal{A}$), indem wir die freien Variablen $y_1, \ldots, y_n$ aus F interpretieren: Dafür setzen wir $I_\mathcal{B}(y_i) = I_\mathcal{A}(a_i)$ für $1 \leq i \leq n$.

Somit gibt es auch für erfüllbare Formeln F mit freien Variablen immer ein Modell mit einem abzählbaren Universum.

(b) Jede Formel, die erfüllbar ist, besitzt ein Modell mit einem endlichen Universum.

Lösung
Falsch: Dazu geben wir ein Gegenbeispiel an. Es sei

$$F = ((\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y)) \land \neg(\forall y \exists x f(x) = y)).$$

Die Formel F sagt aus, dass die Funktion f injektiv, aber nicht surjektiv ist. Auf endlichen Mengen sind Surjektivität und Injektivität äquivalent, d.h. es gibt kein Modell für F mit einem endlichen Universum.

Es gibt aber Modelle für F mit unendlichem Universum, z.B. $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ mit $U_\mathcal{A} = \mathbb{R}$ und $f^\mathcal{A}(x) = e^x$, also ist F erfüllbar.

(c) Es existiert eine erfüllbare Formel F, die mindestens ein (nicht nullstelliges) Funktionssymbol enthält, aber kein Modell mit einem unendlichen Universum besitzt.

Lösung
Falsch: Sei F eine erfüllbare Aussage mit einem nicht-nullstelligen Funktionssymbol. Nach dem Satz von Löwenheim und Skolem besitzt F ein Modell mit einem abzählbaren Universum. Im Beweis zum Satz von Löwenheim und Skolem wird gezeigt, dass ein solches Modell das zu F gehörende *Herbrand-Modell* ist. Sei $\mathcal{F}$ die Menge der in F vorkommenden Funktionssymbole. Das Universum des Herbrand-Modells zu F ist gegeben als das Herbrand-Universum $D(\mathcal{F})$. Dabei ist $D(\mathcal{F})$ genau dann endlich, wenn $\mathcal{F}$ nur Konstanten enthält (Folie 167). Nach Voraussetzung ist in $\mathcal{F}$ aber mindestens ein nicht-nullstelliges Funktionssymbol. Somit ist $D(\mathcal{F})$ unendlich, also gibt es ein Modell zu F mit einem nicht endlichen Universum.
Ist F eine Formel mit freien Variablen, können wir für F wie in Teil (a) auf eine Aussage zurückführen.

Aufgabe 2
Zu einer Menge M von Aussagen in Skolemform schreiben wir $\mathcal{F}(M)$ für die Funktionssymbole, die in M vorkommen. Geben Sie zu den folgenden Formeln F jeweils $\mathcal{F}(\{F\})$, $D(\{F\})$ und $E(\{F\})$ an. Geben Sie anschließend eine unerfüllbare Formel $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_k)$ an mit $F_i \in E(F)$ für $1 \leq i \leq k$.

(a) $F_a = \forall x(P(x) \wedge \neg P(x))$

Lösung
Es gilt $\mathcal{F}(\{F_a\}) = \emptyset$. Wir erhalten also $D(\{F_a\}) = D(\emptyset \cup \{a\}) = \{a\}$. Man beachte, dass die fest gewählte Konstante a hinzugenommen werden muss (siehe Folie 174), weil $\mathcal{F}(\{F_a\})$ keine Konstante enthält. Die Herbrand-Expansion von $\{F_a\}$ ist dann $E(\{F_a\}) = \{(P(a) \wedge \neg P(a))\}$. Die Formel $F_1 = (P(a) \wedge \neg P(a))$ ist unerfüllbar. Sei $\mathcal{B}$ eine zu F_1 passende Struktur mit $\mathcal{B} \models F_1$. Dann gilt auch, dass $\mathcal{B} \models P(a)$, aber somit auch $\mathcal{B} \not\models \neg P(a)$, also $\mathcal{B} \not\models F_1$, was ein Widerspruch ist.

(b) $F_b = \forall x((P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg P(f(a)) \wedge Q(f(a)))$

Lösung
Es gilt $\mathcal{F}(\{F_b\}) = \{a, f\}$. Damit erhalten wir, dass

$$D(\{F_b\}) = D(\{f, a\}) = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Herbrand-Expansion ist dann

$$E(\{F_b\}) = \{((P(f^n(a)) \vee \neg Q(f^n(a))) \wedge \neg P(f(a)) \wedge Q(f(a))) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Mit $n = 1$ erhalten wir die unerfüllbare Formel

$$F_1 = ((P(f(a)) \vee \neg Q(f(a))) \wedge \neg P(f(a)) \wedge Q(f(a))).$$

Sei $\mathcal{B}$ eine zu F_1 passende Struktur mit $\mathcal{B} \models F_1$, also $\mathcal{B} \models (P(f(a)) \vee \neg Q(f(a)))$. Daraus folgt, dass $\mathcal{B} \models P(f(a))$ oder $\mathcal{B} \models \neg Q(f(a))$. Im ersten Fall gilt dann $\mathcal{B} \not\models \neg P(f(a))$. Im zweiten Fall gilt $\mathcal{B} \not\models Q(f(a))$. Also gilt, dass $\mathcal{B} \not\models F_1$, was ein Widerspruch ist.

(c) $F_c = \forall x \forall y((\neg P(x) \vee \neg P(f(y))) \wedge P(f(f(x))))$

Lösung
Es gilt, dass $\mathcal{F}(\{F_c\}) = \{f\}$. Wir müssen hier wieder die fest gewählte Konstante a hinzunehmen, also erhalten wir

$$D(\{F_c\}) = D(\{f\} \cup \{a\}) = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Herbrand-Expansion ist dann

$$E(\{F_c\}) = \{((\neg P(f^n(a)) \vee \neg P(f^{m+1}(a))) \wedge P(f^{n+2}(a))) \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Mit $n = 2, m = 1$ und $n = 0, m = 0$ erhalten wir die Formeln

$$\begin{aligned} F_1 &= ((\neg P(f^2(a)) \vee \neg P(f^2(a))) \wedge P(f^4(a))), \\ F_2 &= ((\neg P(a) \vee \neg P(f(a))) \wedge P(f^2(a))). \end{aligned}$$

Dann ist die Formel $F = (F_1 \wedge F_2)$ unerfüllbar. Sei $\mathcal{B}$ eine zu F passende Struktur mit $\mathcal{B} \models F$. Also gilt auch $\mathcal{B} \models F_2$, und somit auch $\mathcal{B} \models P(f^2(a))$. Daraus folgt aber, dass $\mathcal{B} \not\models \neg P(f^2(a))$, also $\mathcal{B} \not\models F_1$ und somit $\mathcal{B} \not\models F$, was ein Widerspruch ist.

Aufgabe 3
Betrachten Sie folgende Eigenschaften einer binären Relation R:

1. R ist nicht leer.
2. R ist reflexiv.
3. R ist irreflexiv.
4. R ist symmetrisch.
5. R ist transitiv.

(a) Formulieren Sie jede Eigenschaft als Formel.

(b) Geben Sie zu jeder Formel ein Modell an.

Lösung (a) Die Eigenschaften entsprechen den folgenden Formeln:

1. $\exists x \exists y R(x, y)$
2. $\forall x R(x, x)$
3. $\forall x \neg R(x, x)$
4. $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$
5. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$

(b) Als Modelle erhalten wir beispielsweise:

1. $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ mit $U_{\mathcal{A}} = \{0\}$, $R^{\mathcal{A}} = \{(0,0)\}$
2. $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ mit $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}$, $R^{\mathcal{A}} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
3. $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ mit $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$, $R^{\mathcal{A}} = \{(x,y) \mid x < y\}$
4. $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ mit $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}$, $R^{\mathcal{A}} = \{(x,y) \mid x \neq y\}$
5. $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ mit $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$, $R^{\mathcal{A}} = \{(x,y) \mid x \text{ ist ein Teiler von } y\}$