

**Klausur zur Vorlesung
„Berechenbarkeit und Logik“
SS 2024 / 22. Juli 2024**

Vorname: _____

Nachname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe	Punktzahl	Erreicht
1	10	
2	5	
3	3	
4	4	
5	5	
6	5	
7	6	
8	6	
9	6	
10	6	
11	6	
12	8	
Bonus	0	
Σ	70	

Generelle Hinweise:

- Prüfungsdauer: **120 Minuten**
- Wenn Sie in der Klausur **35 Punkte** erreichen, haben Sie mit Sicherheit bestanden.
- Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Benutzen Sie ein **dokumentenechtes Schreibgerät**.
- Überprüfen Sie die Ihnen ausgehändigte Klausur auf Vollständigkeit (**13 Aufgaben** auf 12 Seiten).
- Tragen Sie **auf jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matr.-Nr.** in die entsprechenden Felder ein.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder. Reicht der Platz in einem Feld nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite des entsprechenden Blattes und vermerken Sie dies auf der Vorderseite. Reicht der Platz dennoch nicht aus, können Sie die Aufsicht nach zusätzlichen Blättern fragen.
- Schreiben Sie bitte **deutlich**. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Ein **Täuschungsversuch** führt umgehend zum Ausschluss und **Nichtbestehen**. Es erfolgt keine Vorwarnung.
- Alle mitgeführten **elektronischen Geräte** sind vor der Klausur bzw. spätestens jetzt auszuschalten.

Inhaltliche Hinweise:

- In den WHILE- und LOOP-Programmen dürfen Sie die Addition, Multiplikation, die in der Vorlesung definierte Subtraktion und für eine Variable x die Bedingung `IF  $x = 0$  THEN  $P$  END` als WHILE- bzw. LOOP-berechenbar voraussetzen und in Ihren Programmen verwenden. Geben Sie an, in welcher Variable der Ausgabewert am Ende steht.
- Sie dürfen annehmen, dass die Addition und Multiplikation zweier natürlicher Zahlen primitiv-rekursiv sind.
- Für die Konstruktion von μ - bzw. primitiv-rekursiven Funktionen und für WHILE- und LOOP-Programme darf die Schreibweise aus den Übungen benutzt werden.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1. (10 Punkte) Beantworten Sie die folgenden fünf Fragen. Für jede Teilaufgabe gibt es zwei Punkte, wenn Sie die Aufgabe vollständig und korrekt beantwortet haben.

- (a) Wie viele paarweise nicht äquivalente aussagenlogische Formeln mit n atomaren Formeln gibt es?
Wie viele sind es, wenn man sich auf Formeln in DNF beschränkt?

- (2) Sortieren Sie die folgenden 4 Mengen von Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ so, dass die i -te Menge Ihrer Liste in der $(i + 1)$ -ten enthalten ist.

- (a) $\{f \mid f \text{ ist total und } \mu\text{-rekursiv}\}$ (b) $\{f \mid f \text{ ist eine quadratische Funktion}\}$
(c) $\{f \mid f \text{ ist Turing-berechenbar}\}$ (d) $\{f \mid f \text{ ist Loop-berechenbar}\}$

- (3) Geben Sie drei verschiedene nicht entscheidbare Probleme an.

- (4) Hat folgende PCP-Instanz eine Lösung? Begründen Sie!

$$\begin{pmatrix} a & ab & bac \\ aa & ba & bb \end{pmatrix}.$$

- (5) Es sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Formeln der Prädikatenlogik. Geben Sie eine (beliebige) Teilmenge $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ an, die entscheidbar ist.

Name:**Matrikelnummer:**

Aufgabe 2. (5 Punkte) Geben Sie ein LOOP-Programm an, das die folgende Funktion $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ berechnet:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^{\min(y, z^3)}, & \text{falls } x \leq \min(y, z^3), \\ x + \min(y, z^3), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kommentieren Sie neben Ihrer Lösung kurz, was Ihre Teilprogramme ausgeben (Beispiel: [Ihr Code für $\min(x, y)$] - „Berechnung von $\min(x, y)$ “).

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 3. (3 Punkte) Geben Sie an, welche partielle Funktion $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ das folgende GOTO-Programm berechnet (Eingabevariablen sind x_1 und x_2 , die Ausgabevariable ist x_1):

```
 $M_1 : x_3 := x_2 + x_1 ;$   
       $x_4 := x_3 - 5 ;$   
      IF  $x_4 = 0$  THEN GOTO  $M_2 ;$   
      GOTO  $M_1 ;$   
 $M_2 : x_1 := x_1 + x_3 ;$   
      IF  $x_3 = 0$  THEN GOTO  $M_3 ;$   
      HALT  
 $M_3 : x_1 := x_2 + 5 ;$   
      HALT
```

Aufgabe 4. (4 Punkte) Geben Sie an, welche Funktionen von μf und μg berechnet werden, wobei f und g wie folgt definiert sind.

(a) $f : \mathbb{N}^4 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(n, x, y, z) = n \cdot x + n \cdot y^2 + 2z$

(b) $g : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $g(n, x, y) = \max(x, y, n) - \min(x, y, n)$

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 5. Seien $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ und $k: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ beliebige primitiv-rekursive Funktionen. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen ebenfalls primitiv-rekursiv sind.

(a) (2 Punkte) $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x, y) = 2^{k(x, y, x-y)}$

(b) (3 Punkte) $g: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $g(x, y, z) = \prod_{i=1}^x (i \cdot h(k(z, y, y), i) + (i + yz) \cdot h(y, z))$

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 6. (5 Punkte) Sei $b_n = |\text{bin}(n)|$ die Länge der Binärdarstellung von n . Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$f(n) = 2n + 2^{b_n+1}.$$

Geben Sie eine Turingmaschine an, die f berechnet.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Eingabezahl n zu Beginn als Binärzahl auf dem Band steht (zum Beispiel steht bei $n = 5$ zu Beginn 101 auf dem Band).

Achten Sie darauf, dass der Leseschreibkopf am Ende auf dem ersten Zeichen der Ausgabe steht.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 7. (6 Punkte) Betrachten Sie das folgende Problem:

$$L = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare aussagenlog. Formel der Form } G \rightarrow H\}$$

Zeigen Sie, dass L **NP**-vollständig ist.

Hinweis: Dazu müssen Sie zeigen, dass L in **NP** liegt und dass L **NP**-hart ist. Dafür dürfen Sie nutzen, dass die Menge der erfüllbaren aussagenlog. Formeln SAT **NP**-vollständig ist.

Name:**Matrikelnummer:**

Aufgabe 8. (6 Punkte) Zeigen Sie durch geeignetes Anwenden des Markierungsalgorithmus, dass folgende Aussage wahr ist:

$$(\neg A \vee B), (\neg A \vee \neg B \vee C), (\neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E), (\neg B \vee \neg C \vee D) \models (E \vee \neg A)$$

Geben Sie an, welche atomaren Formeln in jedem Schritt markiert werden, jeweils mit Begründung.

Name:**Matrikelnummer:**

Aufgabe 9. (6 Punkte) Verwenden Sie das Resolutionsverfahren der Aussagenlogik, um zu zeigen, dass die folgende Klauselmengen unerfüllbar ist:

$$\{\{A\}, \{B, C, \neg E\}, \{\neg A, D, E\}, \{\neg D, E\}, \{\neg C, \neg E\}, \{\neg B, \neg E\}\}$$

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind:

(a) (3 Punkte) $F = (\neg \exists x \forall y (\neg P(x, y) \vee P(x, x))) \wedge \forall z (P(f(z), z) \wedge \neg P(z, f(z)))$

(b) (3 Punkte) $G = \exists x \exists y \forall z \neg (R(g(x, x, x)) \vee \neg R(g(y, y, y)) \vee \neg R(g(z, z, a)))$

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 11. (6 Punkte) Gegeben sei die folgende Formel F :

$$\forall x \exists y Q(g(x, y), g(y, x)) \wedge \forall x (\neg R(f(x, z)) \vee R(f(z, x)))$$

Überführen Sie F in eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage in Klauselform.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 12. Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$, wobei das Universum gegeben ist durch

$$U_{\mathcal{A}} = \{\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \varphi \text{ ist eine totale Funktion}\}$$

und die Interpretationsfunktion $I_{\mathcal{A}}$ definiert ist durch:

- $P^{\mathcal{A}} = \{\varphi \mid \varphi \text{ ist WHILE-berechenbar}\},$
- $Q^{\mathcal{A}} = \{\varphi \mid \varphi \text{ ist primitiv rekursiv}\},$
- $R^{\mathcal{A}} = \{\varphi \mid \varphi \text{ ist Turing-berechenbar}\},$
- $S^{\mathcal{A}} = \{(\varphi, \psi) \mid \varphi = \mu\psi\}$ (dabei ist μ der Operator der μ -Rekursion),
- $f^{\mathcal{A}}(\varphi, \psi) = \varphi \circ \psi$ (die Komposition der Funktionen),
- $a^{\mathcal{A}} = x \mapsto x^2.$

Formulieren Sie die folgenden Aussagen als prädikatenlogische Formeln:

- (a) (2 Punkte) Jede primitiv rekursive Funktion ist Turing-berechenbar, aber nicht jede Turing-berechenbare Funktion ist primitiv rekursiv.

- (b) (2 Punkte) Nicht jede Komposition von zwei Turing-berechenbaren Funktionen ist primitiv rekursiv.

- (c) (2 Punkte) Die Funktion $x \mapsto x^2$ ist WHILE-berechenbar und die Funktion $x \mapsto x^4$ ist primitiv rekursiv.

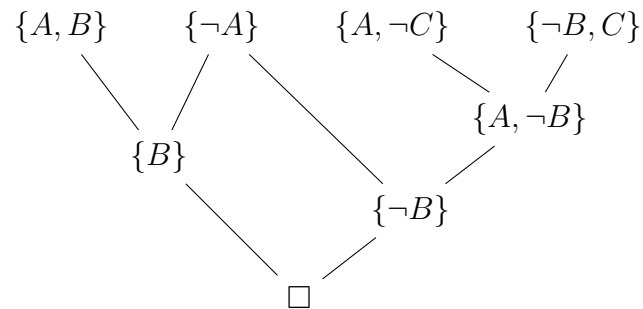
- (d) (2 Punkte) Es gibt eine totale Funktion φ , für die es eine totale Funktion ψ mit $\mu\varphi = \psi$ gibt.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 13. (3 Punkte (Bonus))

Gegeben sei die Formel $F = (A \wedge B) \vee \neg A \vee (A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$. Betrachten Sie den folgenden Resolutionsbeweis:



Die Formel F ist jedoch erfüllbar.

- (a) Erklären Sie den scheinbaren Widerspruch.

- (b) Geben Sie ein Modell für F an.