Klausur zur Vorlesung „Logik I“

SS 2022 / 22. August 2022

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe	**Punktzahl**	**Erreicht**
1	6	
2	6	
3	6	
4	8	
5	6	
6	8	
$\boldsymbol{\Sigma}$	40	

Hinweise

- Tragen Sie bitte **auf jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer** in die entsprechenden Felder ein.
- Prüfungsdauer: **60 Minuten**
- Wenn Sie in der Klausur **20 Punkte** erreichen, haben Sie mit Sicherheit bestanden.
- Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Benutzen Sie ein **dokumentenechtes Schreibgerät** und schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Überprüfen Sie die Ihnen ausgehändigte Klausur auf Vollständigkeit (**6 Aufgaben** auf 6 Seiten).
- Schreiben Sie Ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder. Reicht der Platz in einem Feld nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite des entsprechenden Blattes und vermerken dies auf der Vorderseite. Reicht der Platz dennoch nicht aus, können Sie die Aufsicht nach zusätzlichen Blättern fragen.
- Schreiben Sie bitte **deutlich**. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Ein **Täuschungsversuch** führt umgehend zum Ausschluss und **Nichtbestehen**. Es erfolgt keine Vorwarnung.
- Alle mitgeführten **elektronischen Geräte** sind vor der Klausur bzw. spätestens jetzt auszuschalten.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Zeigen Sie durch geeignetes Anwenden des Markierungsalgorithmus, dass folgende Formel gültig ist:

$$F = B \lor (A \land D \land \neg E) \lor \neg A \lor (C \land \neg B) \lor \neg D \lor (D \land E \land \neg C)$$

Geben Sie an, welche atomaren Formeln in jedem Schritt markiert werden, jeweils mit Begründung.

Lösung: Dies gilt genau dann, wenn

$$\neg F \equiv (B \to 0) \land (A \land D \to E) \land (1 \to A) \land (C \to B) \land (1 \to D) \land (D \land E \to C)$$

unerfüllbar ist.

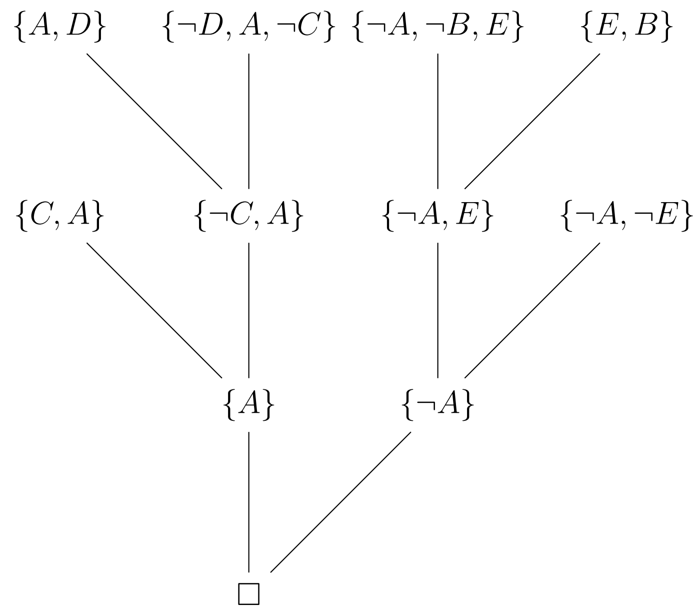
- Markiere A wegen $1 \to A$.
- Markiere D wegen $1 \to D$.
- Markiere E, weil A und D markiert und $A \land D \to E$.
- Markiere C, weil D und E markiert und $D \land E \to C$.
- Markiere B, weil C markiert und $C \to B$.
- Gib unerfüllbar aus, weil B markiert und $B \to 0$.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Verwenden Sie das Resolutionsverfahren der Aussagenlogik, um zu zeigen, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{\neg E, \neg A\}, \{\neg D, A, \neg C\}, \{A, D\}, \{A, C\}, \{\neg A, \neg B, E\}, \{E, B\}\}$$

Lösung:



Aufgabe 3. (6 Punkte)

(a) (3 Punkte) Widerlegen Sie die folgende Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel F gilt: Entweder F oder $\neg F$ ist unerfüllbar.

> **Lösung:** Sei $F = \exists x P(x)$. Dann sind sowohl F als auch $\neg F$ erfüllbar: Sei $U_{\mathcal{A}} = \{0\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{0\}$, dann gilt $\mathcal{A} \models F$, also ist F erfüllbar.
> Sei $U_{\mathcal{A}} = \{0\}$, $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$, dann gilt $\mathcal{A} \models \neg F$, also ist $\neg F$ erfüllbar.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\forall x((P(x) \vee \neg P(x)) \to R(x,x)) \models \forall x R(x,x)$$

> **Lösung:** Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Struktur und gelte $\mathcal{A} \models \forall x((P(x) \vee \neg P(x)) \to R(x,x))$. Es gilt also für alle $a \in U_{\mathcal{A}}$, dass $\mathcal{A}_{[x/a]} \models ((P(x) \vee \neg P(x)) \to R(x,x))$. Da $P(x) \vee \neg P(x)$ gültig ist, folgt, dass für alle $a \in U_{\mathcal{A}}$ gilt, dass $\mathcal{A}_{[x/a]} \models R(x,x)$. Also $\mathcal{A} \models \forall x R(x,x)$. Dies zeigt die Behauptung.

Aufgabe 4. (8 Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind:

(a) (4 Punkte) $F = (\forall x \forall y (R(f(x), f(y)) \to R(x, y)) \land \exists z (\neg R(z, f(z)) \land R(f(z), z)))$

> **Lösung:** Sei $U_\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $f^\mathcal{A}(x) = 1$, $R^\mathcal{A} = \{(1, 0)\}$, dann gilt $\mathcal{A} \models F$, also ist F erfüllbar.
> Sei $U_\mathcal{A} = \{0\}$, $f^\mathcal{A}(x) = x$, $R^\mathcal{A} = \emptyset$, dann gilt $\mathcal{A} \not\models F$, also ist F nicht gültig.

(b) (4 Punkte) $G = (\forall x R(f(g(x)), g(f(x))) \land \forall y \neg R(g(f(g(y))), f(g(f(y)))))$

> **Lösung:** Sei $U_\mathcal{A} = \mathbb{R}$, $g^\mathcal{A}(x) = x + 1$, $f^\mathcal{A}(x) = x - 1$, $R^\mathcal{A} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, dann gilt $\mathcal{A} \models G$, also ist G erfüllbar.
> Sei $U_\mathcal{A} = \{0\}$, $g^\mathcal{A}(x) = x$, $f^\mathcal{A}(x) = x$, $R^\mathcal{A} = \{0\}$, dann gilt $\mathcal{A} \not\models G$, also ist G nicht gültig.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die folgende Literalmenge L an. Geben Sie in jedem Schritt an, welche Literale Sie unifizieren. Geben Sie außerdem in jedem Schritt die Substitution und die Literalmenge an, die Sie erhalten.

$$L = \{P(x, f(g(y)), g(z)), P(g(z), f(z), g(w)), P(g(g(y)), f(w), x)\}$$

Lösung: sub $:= \emptyset$.

- $P(x, f(g(y)), g(z))$ und $P(g(z), f(z), g(w))$,
  sub $:=$ sub$[x/g(z)] = [x/g(z)]$,
  Lsub $= \{P(g(z), f(g(y)), g(z)), P(g(z), f(z), g(w)), P(g(g(y)), f(w), g(z))\}$.
- $P(g(z), f(g(y)), g(z))$ und $P(g(z), f(z), g(w))$,
  sub $:=$ sub$[z/g(y)] = [x/g(g(y)), z/g(y)]$,
  Lsub $= \{P(g(g(y)), f(g(y)), g(g(y))), P(g(g(y)), f(g(y)), g(w)),$
  $P(g(g(y)), f(w), g(g(y)))\}$.
- $P(g(g(y)), f(g(y)), g(g(y)))$ und $P(g(g(y)), f(g(y)), g(w))$,
  sub $:=$ sub$[w/g(y)] = [x/g(g(y)), z/g(y), w/g(y)]$,
  Lsub $= \{P(g(g(y)), f(g(y)), g(g(y)))\}$.
  Da $|L\text{sub}| = 1$ terminiert der Algorithmus. Die Menge L ist also unifizierbar.

Aufgabe 6. (8 Punkte)
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$, wobei das Universum gegeben ist durch

$$U_\mathcal{A} = \{L \mid L \text{ ist eine Sprache über } \Sigma\}$$

und die Interpretationsfunktion $I_\mathcal{A}$ definiert ist durch:

- $Q^\mathcal{A} = \{L \mid L \text{ ist regulär}\}$,
- $R^\mathcal{A} = \{(L_1, L_2) \mid L_1 \subseteq L_2\}$,
- $f^\mathcal{A}(L) = \Sigma^* \setminus L$,
- $b^\mathcal{A} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

und $\mathcal{I}(=)$ wie üblich mit der Gleichheit interpretiert wird. Formulieren Sie die folgenden Aussagen als prädikatenlogische Formeln:

(a) (2 Punkte) Die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ und das Komplement von $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ sind nicht regulär.

Lösung: $\neg Q(b) \wedge \neg Q(f(b))$

(b) (2 Punkte) Es gibt eine reguläre Sprache, sodass alle Sprachen Teilmengen dieser regulären Sprache sind.

Lösung: $\exists x(Q(x) \wedge \forall y R(y, x))$

(c) (2 Punkte) Das Komplement einer regulären Sprache ist ebenfalls regulär.

Lösung: $\forall x(Q(x) \rightarrow Q(f(x)))$

(d) (2 Punkte) Es gibt eine reguläre Sprache, die Teilmenge von $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist.

Lösung: $\exists x(Q(x) \wedge R(x, b))$