Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 3

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Es dürfen primitiv rekursive Funktionen verwendet werden, die in der Vorlesung bereits besprochen wurden.

(a) $f(n) = n!$

(b) $g(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

(c) $k(n, m) = m^n$

(d) $h(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{für } x_1 = 0 \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 2
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv und streng monoton wachsend. Zeigen Sie: Die Linksinverse f^{-1} (d.h. $(f^{-1} \circ f)(n) = f^{-1}(f(n)) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$) ist primitiv-rekursiv.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $q(n) = \max\{x \leq n \mid g(x, n) = 0\}$ für eine geeignete zweistellige Funktion $g(x, n)$. Es gilt $\max \varnothing = 0$.
Bonus: Streng monoton wachsende Funktionen haben eine bestimmte Eigenschaft, weswegen Linksinverse existieren. Welche Eigenschaft benötigen Sie für eine Funktion, damit eine Rechtsinverse existiert?

Aufgabe 3
Bestimmen Sie μf für die folgenden Funktionen.

(a) $f(n, x) = n + x$

(b) $f(n, x) = x - n$

(c) $f(n, x, y) = x - n \cdot y$

(d) $f(n, x, y, z) = 5^x + y - z^5 \cdot n$

(e) $f(n, x, y, z) = (y - 5n^2) + (x + z) \cdot n$

(f) $f(n, x, y) = \max(2n, x, y) - n$

Aufgabe 4
Beweisen Sie, dass folgende Funktionen μ-rekursiv sind:

(a) $f(x, y) = \lceil \log_y(x) \rceil$, $y \geq 2$ (hierbei sei $\log_y(0) = 0$)

(b) $g(x, y) = \begin{cases} y & \text{wenn } x = 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$