Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 3

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Es dürfen primitiv rekursive Funktionen verwendet werden, die in der Vorlesung bereits besprochen wurden.

(a) $f(n) = n!$

(b) $g(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

(c) $k(n,m) = m^n$

(d) $h(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{für } x_1 = 0 \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$

Lösung
Wir bezeichnen mit add die Addition, mit mult die Multiplikation und mit $\mathrm{comp}(g, f_1, \ldots, f_k)$ die Komposition der Funktion g mit den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ (siehe Folie 56 im Skript).

(a) Wir definieren die Funktion $\varphi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(x,y) = x \cdot (y+1)$. Dann können wir $f(n) = n!$ mittels primitiver Rekursion definieren:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(n+1) &= \varphi(f(n), n). \end{aligned}$$

Wir erhalten $f(n+1) = f(n)\cdot(n+1) = n!\cdot(n+1) = (n+1)!$ und für den Basisfall gilt $f(0) = 1 = 0!$. Die Konstante 1 aus dem Basisfall wird formal durch die konstante Funktion $k_1\colon \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ mit $k_1() = 1$ repräsentiert. Die Funktion φ ist primitiv rekursiv, da die Nachfolgerfunktion, Kompositionen und Projektionen primitiv rekursiv sind (siehe Folie 56 im Skript). Genauer:

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \mathrm{comp}(\mathrm{mult}, \pi_1^2, \mathrm{comp}(s, \pi_2^2))(x,y) \\ &= \mathrm{mult}(\pi_1^2(x,y), \mathrm{comp}(s, \pi_2^2)(x,y)) \\ &= \mathrm{mult}(x, s(\pi_2^2(x,y))) \\ &= \mathrm{mult}(x, s(y)) \\ &= x\cdot(y+1). \end{aligned}$$

(b) Es gilt $g(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ (Gauß'sche Summenformel). Damit lässt sich g analog zur Fakultät aus (a) definieren, wobei der Wert $g(0)$ im Basisfall diesmal 0 statt 1 ist, und add statt mult in der Rekursionsdefinition verwendet wird: Sei $\psi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert als $\psi(x, y) = x + (y + 1)$, dann kann man g mittels primitiver Rekursion wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g(n+1) &= \psi(g(n), n). \end{aligned}$$

Wir erhalten $g(n+1) = g(n) + (n+1) = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i$ und für den Basisfall gilt $g(0) = 0 = \sum_{i=1}^{0} i$.

(c) Definiere $\tau\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $\tau(x, y, z) = x \cdot z = \mathrm{mult}(x, z)$. Es gilt

$$\begin{aligned} k(0, m) &= 1 \\ k(n+1, m) &= \tau(k(n, m), n, m). \end{aligned}$$

Wir erhalten $k(n+1, m) = k(n, m) \cdot m = m^n \cdot m = m^{n+1}$.

(d) Wir definieren Funktionen $h_1\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $h_1(x, y) = \pi_1^2(x, y) = x$ und $h_2\colon \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ mit $h_2(a, b, c, d) = \pi_4^4(a, b, c, d) = d$. Es gilt

$$\begin{aligned} h(0, x_2, x_3) &= h_1(x_2, x_3) = x_2 \\ h(n+1, x_2, x_3) &= h_2(h(n, x_2, x_3), n, x_2, x_3) = x_3. \end{aligned}$$

Aufgabe 2
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv und streng monoton wachsend. Zeigen Sie: Die Linksinverse f^{-1} (d.h. $(f^{-1} \circ f)(n) = f^{-1}(f(n)) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$) ist primitiv-rekursiv.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $q(n) = \max\{x \leq n \mid g(x, n) = 0\}$ für eine geeignete zweistellige Funktion $g(x, n)$. Es gilt $\max \varnothing = 0$.

Bonus: Streng monoton wachsende Funktionen haben eine bestimmte Eigenschaft, weswegen Linksinverse existieren. Welche Eigenschaft benötigen Sie für eine Funktion, damit eine Rechtsinverse existiert?

Lösung
Behauptung 1:
Wählen wir $g(x, n) = \mathrm{sub}(f(x), n)$, so ist $q(n)$ die gesuchte Linksinverse f^{-1} von f.

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} q(f(n)) &= \max\{x \leq f(n) \mid \mathrm{sub}(f(x), f(n)) = 0\} \\ &= \max\{x \leq f(n) \mid f(x) \leq f(n)\} \\ &= \max\{x \leq n \mid f(x) \leq f(n)\} \\ &= n \end{aligned}$$

Das dritte = gilt, da f streng monoton wachsend ist, also $n \leq f(n) < f(n+1)$ gilt. Die erste Ungleichung impliziert, dass das Maximum in der Zeile darüber über mindestens n Zahlen gebildet wurde. Die zweite Ungleichung besagt, dass $f(x) > f(n)$ für jedes $x > n$, also kann man $n+1, n+2, \ldots, f(n)$ als Werte für x weglassen. Somit haben wir gezeigt, es gilt $q = f^{-1}$.

Behauptung 2:
Der beschränkte max-Operator q ist primitiv-rekursiv, falls g primitiv-rekursiv ist.

Die Idee ist ähnlich wie im Skript auf Folie 64. Sei $g(x, n)$ eine primitiv-rekursive Funktion. Dann ist $\tilde{g}(x, n) = \mathrm{sub}(1, g(x, n))$ auch primitiv-rekursiv. Es gilt

$$\tilde{g}(x, n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } g(x, n) = 0, \\ 0, & \text{falls } g(x, n) > 0. \end{cases}$$

Also ist $\tilde{g}(x, n) = 1$ genau dann, wenn „$g(x, n) = 0$?“ TRUE ist. Der beschränkte max-Operator q lässt sich jetzt durch primitive Rekursion wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} q(0) &= 0 \\ q(n+1) &= q(n) + \tilde{g}(n+1, n+1) * \mathrm{sub}(n+1, q(n)) \\ &= \begin{cases} n+1, & \text{falls } g(n+1, n+1) = 0, \\ q(n), & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass die Linksinverse f^{-1} primitiv-rekursiv ist (denn f ist primitiv-rekursiv, also auch $g(x, n) = \mathrm{sub}(f(x), n)$).

Bonus: Linksinverse zu f existieren, wenn f injektiv ist (streng monoton wachsende Funktionen sind injektiv). Für Rechtsinverse benötigen wir wiederum Surjektivität. Denn: Sei $i = f^{-1}(n)$, dann ist $f(f^{-1}(n)) = f(i)$. Wir wollen also, dass es ein i gibt, so dass $f(i) = n$ gilt. Dies soll aber für jede natürliche Zahl n möglich sein. Also muss f surjektiv sein.
Falls f also injektiv *und* surjektiv (also bijektiv) ist, so existiert eine eindeutige (beidseitige) Inverse. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller primitiv-rekursiver (alternativ totaler Turing-berechenbarer) bijektiver Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dann ist $(\mathcal{F}, \circ)$ eine Gruppe ($\circ$ ist die Komposition von Funktionen).

Aufgabe 3
Bestimmen Sie μf für die folgenden Funktionen.

(a) $f(n, x) = n + x$

(b) $f(n, x) = x - n$

(c) $f(n, x, y) = x - n \cdot y$

(d) $f(n, x, y, z) = 5^x + y - z^5 \cdot n$

(e) $f(n, x, y, z) = (y - 5n^2) + (x + z) \cdot n$

(f) $f(n, x, y) = \max(2n, x, y) - n$

Lösung
Offensichtlich sind alle Funktionen in dieser Aufgabe total, d.h. es genügt, die erste Nullstelle zu finden.

(a) $(\mu f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$

Für $x = 0$ erhalten wir mit Hilfe von $n = 0$ eine Nullstelle. Falls $x > 0$ ist, so hat $f(n, x)$ keine Nullstellen, da wir nur natürliche Zahlen betrachten.

(b) $(\mu f)(x) = x$, denn für alle $n, x \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f(n, x) = 0$ genau dann, wenn $n \geq x$. D.h. für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n, x) = 0\} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x\} = x.$$

(c) Sei zunächst $y \neq 0$. Dann ist $(\mu f)(x, y) = \lceil x/y \rceil$, denn

$$\begin{aligned} \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n, x, y) = 0\} &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid x - n \cdot y = 0\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot y \geq x\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x/y\} \\ &= \lceil x/y \rceil. \end{aligned}$$

Mit Betrachtung des Falls $y = 0$ erhalten wir insgesamt

$$(\mu f)(x, y) = \begin{cases} \lceil x/y \rceil & \text{falls } y \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = y = 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(d) Ähnliche Überlegungen wie bei (c) liefern

$$(\mu f)(x, y, z) = \begin{cases} \left\lceil \frac{5^x + y}{z^5} \right\rceil, & \text{falls } z > 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Allerdings ist 5^x stets größer als 0, weswegen nur 2 Fälle auftreten können.

(e) Ist $y = 0$, so ist $n = 0$ die kleinste Nullstelle. Für $y > 0$ ist dies jedoch nicht möglich. Dann kommt es darauf an, ob $(x + z) > 0$ ist oder nicht. Da nämlich $y > 0$ wegen des ersten Teils $n > 0$ impliziert, bedeutet $(x + z) > 0$, dass der zweite Teil größer ist als 0, also $(\mu f)(x, y, z)$ undefiniert ist.

$$(\mu f)(x,y,z) = \begin{cases} \text{undefiniert}, & \text{falls } y > 0 \text{ und } (x > 0 \text{ oder } z > 0), \\ 0, & \text{falls } y = 0, \\ \lceil\sqrt{\frac{y}{5}}\rceil & \text{sonst, d.h. } x = z = 0. \end{cases}$$

(f) Falls $x > 0$ oder $y > 0$ ist, so ist $(\mu f)(x, y)$ undefiniert. O.B.d.A. sei $x \geq y$, dann ist $\max(2n, x, y) \geq x$, jedoch muss dann $n \geq x$ sein, damit n eine Nullstelle von f ist. Dies ist jedoch nicht möglich, da dann $\max(2n, x, y) = 2n$ ist und es gilt stets $2n - n = n \geq x > 0$. Für $x = y = 0$ wiederum ist $n = 0$ die kleinste Nullstelle. Somit gilt

$$(\mu f)(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y = 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass folgende Funktionen μ-rekursiv sind:

(a) $f(x, y) = \lceil\log_y(x)\rceil, y \geq 2$ (hierbei sei $\log_y(0) = 0$)

(b) $g(x,y) = \begin{cases} y & \text{wenn } x = 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$

Lösung

(a) Idee: Probiere alle Potenzen von y durch und schaue, welche als erste größer oder gleich x wird. Es gilt

$$\begin{aligned} \lceil\log_y(x)\rceil &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq \log_y(x)\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid y^n \geq x\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid x - y^n \leq 0\}. \end{aligned}$$

Die Umformung $n \geq \log_y(x) \Rightarrow y^n \geq x$ stimmt nur für $y \geq 2$, aber dies ist laut Aufgabenstellung gegeben. Sei nun $h\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definiert als $h(n, x, y) = x - y^n$. Dann gilt $f = \mu h$. Außerdem ist h μ-rekursiv (sogar primitiv rekursiv, siehe Aufgabe 1).

(b) Sei $k(n, x, y) = (y - n) + x$. Behauptung: Es gilt $g = \mu k$. Es gilt

$$\mu k(0, y) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (y - n) + 0 = 0\} = y = g(0, y).$$

Außerdem gilt für alle $x > 0$, dass

$$\mu k(x, y) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (y - n) + x = 0\} = \min \varnothing = \text{undef.} = g(x, y),$$

weil die Subtraktion (in diesem Fall $y - n$) in unserem Kontext immer bei 0 abgeschnitten ist. Von daher ist $(y - n) + x > 0$ für $x > 0$. Und: k ist primitiv rekursiv.