Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 4

Aufgabe 1
Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie.

(a) Es gibt unendlich viele Funktionen f, so dass μf primitiv rekursiv ist.

(b) Es gibt eine WHILE-berechenbare Funktion f, die total ist, aber für die μf nicht LOOP-berechenbar ist.

(c) Für jede nicht totale Funktion f ist μf ebenfalls nicht total.

(d) Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ ($k \geq 1$) eine (Turing-)berechenbare Funktion. Für jedes k-Tupel $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ sei $f_{\bar{x}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale, surjektive Funktion, wobei $f_{\bar{x}}$ definiert ist durch $f_{\bar{x}}(n) = f(n, x_1, \ldots, x_k)$. Dann ist μf total.

(e) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar. Dann ist $f \circ g$ berechenbar.

(f) Die Rückrichtung in (e) gilt.

(g) Wenn eine Sprache L entscheidbar ist, dann ist auch $\overline{L}$ entscheidbar.

(h) Jede reguläre Sprache ist entscheidbar.

(i) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv. Dann ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq f(n)\}$ entscheidbar.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Menge der Primzahlen $\mathcal{P}$ und die Menge der Quadratzahlen $\mathcal{Q}$ entscheidbar sind. Geben Sie zudem ein WHILE-Programm an, welches die halbe charakteristische Funktion $\chi'_{\mathcal{Q}}$ berechnet.

Aufgabe 3
Ein bekanntes Problem aus der Mathematik ist Hilberts zehntes Problem: Gegeben ein Polynom $p(x_1, \ldots, x_n)$ mit ganzzahligen Koeffizienten in n Variablen ($n \geq 1$ beliebig), existieren $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ mit $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$? Erst 1970 wurde bewiesen, dass dieses Problem unentscheidbar ist.

(a) Ist Hilberts zehntes Problem semi-entscheidbar?

(b) Ist das Komplement semi-entscheidbar?

Aufgabe 4
Wir haben in FSA gesehen, dass Typ-0-Sprachen, also semi-entscheidbare Sprachen, unter Homomorphismenbildung abgeschlossen sind. Zur Erinnerung: Ein (Monoid-)Homomorphismus ist eine Abbildung $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ mit $h(uv) = h(u)h(v)$ und $h(\varepsilon) = \varepsilon$. Zeigen Sie, dass auch entscheidbare Sprachen unter Homomorphismenbildung abgeschlossen sind, d.h. wenn L entscheidbar ist, dann auch $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.