Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 8

Aufgabe 1
Zeichnen Sie jeweils den Syntaxbaum zu folgenden Formeln F. Berechnen Sie anschließend jeweils den Wert $\mathcal{B}(F)$ für die gegebenen Formeln F und Belegungen $\mathcal{B}$.

(a) $F = (\neg(A \wedge (B \vee C)) \wedge (B \vee \neg C))$ $\quad$ $\mathcal{B}\colon A \mapsto 1,\ B \mapsto 0,\ C \mapsto 0$

(b) $F = ((\neg B \wedge \neg C) \leftrightarrow ((A \to \neg B) \to C))$ $\quad$ $\mathcal{B}\colon A \mapsto 1,\ B \mapsto 0,\ C \mapsto 1$

(c) $F = ((A \vee (B \leftrightarrow \neg C)) \to \neg(A \vee B))$ $\quad$ $\mathcal{B}\colon A \mapsto 0,\ B \mapsto 1,\ C \mapsto 1$

Aufgabe 2
Ein Gerät besitzt vier Lämpchen $L_1, \ldots, L_4$, die entweder grün oder rot leuchten können. Das Gerät arbeitet korrekt, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. L_1 leuchtet grün.
2. Wenn L_1 oder L_2 grün leuchtet, dann leuchtet auch L_4 grün.
3. Mindestens eins der Lämpchen leuchtet rot.
4. L_3 leuchtet rot, wenn L_1 und L_2 in verschiedenen Farben leuchten.

Formalisieren Sie die Spezifikation des Gerätes durch eine aussagenlogische Formel. Geben Sie die gesamte Wahrheitstafel für Ihre Formel an. Ist die Formel erfüllbar?

Aufgabe 3
Betrachten Sie die folgenden Probleme!

(a) Zeigen Sie, dass L **NP**-vollständig ist:

$$L = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare aussagenlog. Formel der Form } G \to H\}$$

(b) Zeigen Sie, dass L' in **P** liegt, indem Sie einen deterministischen Polynomialzeitalgorithmus angeben, der L' entscheidet:

$$L' = \{F \mid F \text{ ist in KNF und es gibt eine Belegung } \mathcal{B} \text{ mit } \mathcal{B}(F) = 0\}$$

Wir greifen der Vorlesung hier ein kleines bisschen vor: Eine KNF ist eine Formel der Form $(A \vee B \vee C \vee \ldots) \wedge (D \vee \ldots) \wedge (E \vee \ldots) \wedge \ldots$.

Aufgabe 4
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für beliebige Formeln F, G, H:

(a) Wenn $(F \vee G)$ erfüllbar ist, dann ist auch F erfüllbar.

(b) Wenn $(F \wedge G)$ erfüllbar ist, dann ist auch F erfüllbar.

(c) Wenn $(F \leftrightarrow G)$ erfüllbar ist, dann ist $(F \leftrightarrow G)$ auch gültig.

(d) Wenn $(F \wedge G)$ unerfüllbar ist, dann ist F unerfüllbar oder G unerfüllbar.

(e) Wenn $(F \vee G)$ gültig ist, dann ist F erfüllbar oder G erfüllbar.

(f) Wenn F und G erfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.

(g) Wenn F und G unerfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.