

Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Zeichnen Sie jeweils den Syntaxbaum zu folgenden Formeln F . Berechnen Sie anschließend jeweils den Wert $\mathcal{B}(F)$ für die gegebenen Formeln F und Belegungen $\mathcal{B}$.

(a) $F = (\neg(A \wedge (B \vee C)) \wedge (B \vee \neg C))$ $\mathcal{B}: A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 0$

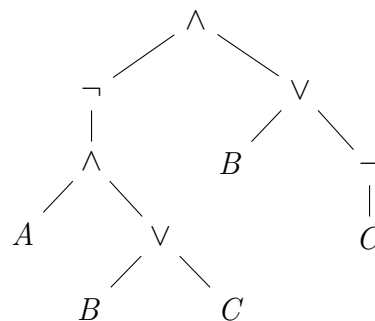
(b) $F = ((\neg B \wedge \neg C) \leftrightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow C))$ $\mathcal{B}: A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 1$

(c) $F = ((A \vee (B \leftrightarrow \neg C)) \rightarrow \neg(A \vee B))$ $\mathcal{B}: A \mapsto 0, B \mapsto 1, C \mapsto 1$

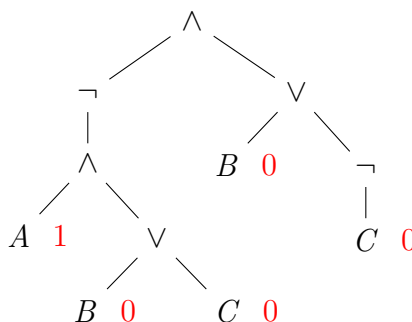
Lösung

Die erste Teilaufgabe wird ausführlich beschrieben. Die weiteren zwei kürzen wir ab und zeigen nur das Endergebnis.

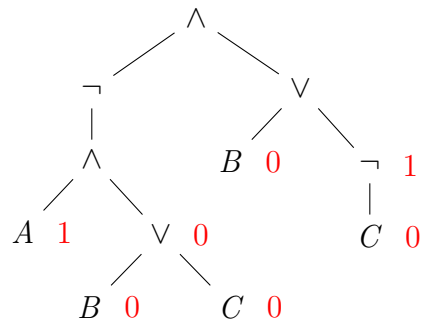
(a) Der Syntaxbaum für F ist:



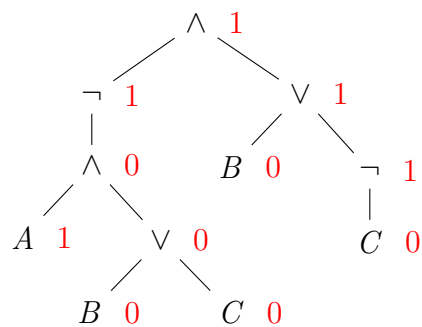
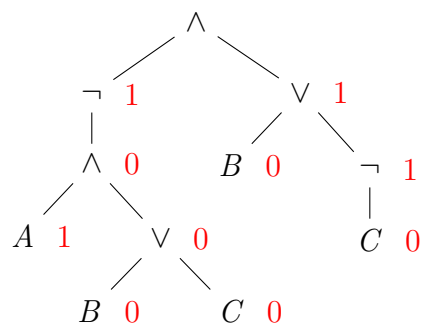
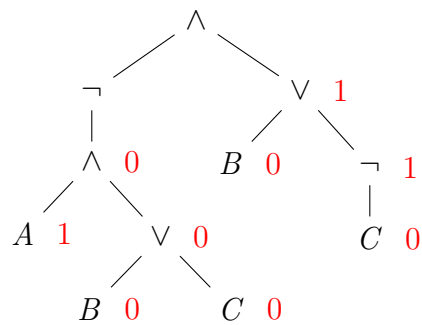
Wir beschriften diesen nun bottom-up mit den Werten für die jeweiligen Teilformeln. Für die Blätter verwenden wir die Werte von $\mathcal{B}$:



Wir können in jedem weiteren Schritt alle Knoten beschriften, deren Kinder beschriftet sind. Im nächsten Schritt erhalten wir also:

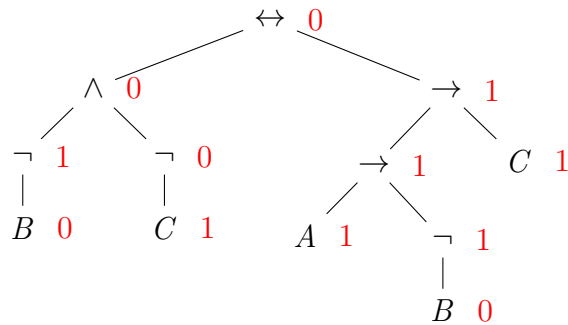


Die weiteren Schritte sind

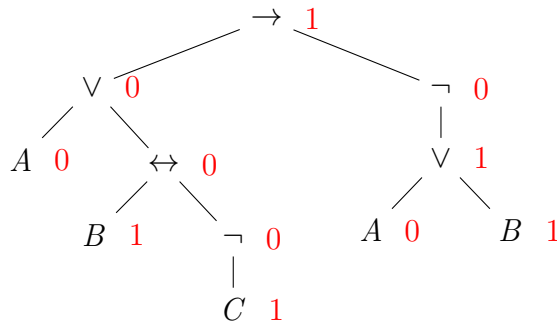


Der Wert ist also $\mathcal{B}(F) = 1$.

(b) Es gilt $\mathcal{B}(F) = 0$, denn:



(c) Es gilt $\mathcal{B}(F) = 1$, denn:



Aufgabe 2

Ein Gerät besitzt vier Lämpchen $L_1, \dots, L_4$, die entweder grün oder rot leuchten können. Das Gerät arbeitet korrekt, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. L_1 leuchtet grün.
2. Wenn L_1 oder L_2 grün leuchtet, dann leuchtet auch L_4 grün.
3. Mindestens eins der Lämpchen leuchtet rot.
4. L_3 leuchtet rot, wenn L_1 und L_2 in verschiedenen Farben leuchten.

Formalisieren Sie die Spezifikation des Gerätes durch eine aussagenlogische Formel. Geben Sie die gesamte Wahrheitstafel für Ihre Formel an. Ist die Formel erfüllbar?

Lösung

Jede Lampe $L_1, \dots, L_4$ sehen wir als atomare Formel an. Dabei soll $\mathcal{B}(L_i) = 1$ bedeuten, dass Lampe i grün leuchtet, bzw. $\mathcal{B}(L_i) = 0$, dass Lampe i rot leuchtet. Wir erhalten also folgende Formeln $F_1, \dots, F_4$, wobei die gesamte Formel dann $F = (F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4)$ ist:

$$F_1 = L_1$$

$$F_2 = ((L_1 \vee L_2) \rightarrow L_4)$$

$$F_3 = (\neg L_1 \vee \neg L_2 \vee \neg L_3 \vee \neg L_4)$$

$$F_4 = (\neg(L_1 \leftrightarrow L_2) \rightarrow \neg L_3)$$

Wahrheitstafel für F :

L_1	L_2	L_3	L_4	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Diese Tabelle kann man erhalten, indem man einfach für jede der 16 Belegungen den Wert für F ausrechnet. Ein besseres Vorgehen ist hier wie folgt: Da $F = (F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4)$, schauen wir, in welchen Fällen sich F_1 , F_2 , F_3 und F_4 einzeln zu 0 auswerten. Denn es gilt, dass $\mathcal{B}(F) = 0$ genau dann, wenn $\mathcal{B}(F_1) = 0$ oder $\mathcal{B}(F_2) = 0$ oder $\mathcal{B}(F_3) = 0$ oder $\mathcal{B}(F_4) = 0$. Wir beginnen mit F_1 und tragen überall, wo $\mathcal{B}(L_1) = 0$ gilt, eine 0 ein. Dies ist die obere Hälfte der Tabelle, die wir im Weiteren ignorieren werden. Wir müssen also noch folgende Tabelle ausfüllen:

L_1	L_2	L_3	L_4	F
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

Es gilt $\mathcal{B}(F_2) = 0$ genau dann, wenn $\mathcal{B}(L_1 \vee L_2) = 1$ und $\mathcal{B}(L_4) = 0$. Wegen $\mathcal{B}(L_1) = 1$ ist also $\mathcal{B}(F_2) = 0$ genau dann, wenn $\mathcal{B}(L_4) = 0$. Damit erhalten wir:

L_1	L_2	L_3	L_4	F
1	0	0	0	0
1	0	0	1	
1	0	1	0	0
1	0	1	1	
1	1	0	0	0
1	1	0	1	
1	1	1	0	0
1	1	1	1	

$\mathcal{B}(F_3) = 0$ gilt nur für die Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(L_i) = 1$ für alle $1 \leq i \leq 4$. Wir erhalten also:

L_1	L_2	L_3	L_4	F
1	0	0	0	0
1	0	0	1	
1	0	1	0	0
1	0	1	1	
1	1	0	0	0
1	1	0	1	
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Es gilt $\mathcal{B}(F_4) = 0$ genau dann, wenn $\mathcal{B}(L_3) = 1$ und $\mathcal{B}(L_1) \neq \mathcal{B}(L_2)$. Bei den restlichen drei Einträgen gilt dies nur für die Belegung $\mathcal{B}$: $L_1 \rightarrow 1$, $L_2 \rightarrow 0$, $L_3 \rightarrow 1$, $L_4 \rightarrow 1$. Somit erhalten wir:

L_1	L_2	L_3	L_4	F
1	0	0	0	0
1	0	0	1	
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

In den übrigen zwei Fällen muss sich die Formel also zu 1 auswerten.

Die Formel ist erfüllbar, weil es Belegungen gibt, unter denen sich die Formel zu 1 auswertet.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die folgenden Probleme!

- (a) Zeigen Sie, dass L **NP**-vollständig ist:

$$L = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare aussagenlog. Formel der Form } G \rightarrow H\}$$

- (b) Zeigen Sie, dass L' in **P** liegt, indem Sie einen deterministischen Polynomialzeitalgorithmus angeben, der L' entscheidet:

$$L' = \{F \mid F \text{ ist in KNF und es gibt eine Belegung } \mathcal{B} \text{ mit } \mathcal{B}(F) = 0\}$$

Wir greifen der Vorlesung hier ein kleines bisschen vor: Eine KNF ist eine Formel der Form $(A \vee B \vee C \vee \dots) \wedge (D \vee \dots) \wedge (E \vee \dots) \wedge \dots$.

Lösung

- (a) Sei F' von der Form $G \rightarrow H$. Es gilt $\mathcal{B}(F') = 1$ genau dann wenn $\mathcal{B}(G) = 0$ oder $\mathcal{B}(H) = 1$. Wir definieren also $f(F) = F' = (A \vee \neg A) \rightarrow F$. Ist $F \in SAT$, so ist auch F' erfüllbar (gleiches Modell wie F erweitert um einen beliebigen Wert für A). Falls $F \notin SAT$ ist, so ist auch F' unerfüllbar, denn es gilt dann stets $\mathcal{B}(A \vee \neg A) = 1$ und $\mathcal{B}(F) = 0$ für jede Belegung $\mathcal{B}$. Die Reduktion f ist offenbar in Polynomialzeit berechenbar. Somit haben wir $SAT \leq_p L$ und L ist **NP**-hart (Satz von Cook).

Es gilt außerdem $L \subseteq SAT$, d.h. wir können überprüfen, ob eine Formel $F \in L$ ist indem wir zunächst testen, ob F erfüllbar ist ($F \in SAT$) und ob F die passende Gestalt hat, also $F = G \rightarrow H$ für aussagenlogische Formeln G und H . Ob F erfüllbar ist geht in **NP** und ob F eine Implikation ist, kann in Linearzeit überprüft werden. Folglich ist $L \in \mathbf{NP}$.

Insgesamt ist L also **NP**-vollständig.

- (b) Ist die Formel nicht gültig und in KNF, so ist sie in L' . Ist eines von beiden Dingen nicht erfüllt, ist die Formel nicht in L' . Gültigkeit kann in KNF in Linearzeit überprüft werden: Einfach die Formel von links nach rechts durchgehen und schauen, ob jede Klausel bzw. jede Disjunktion gültig ist, also A und $\neg A$ für eine atomare Formel enthält. Auch ob die Formel in KNF ist, kann man in Linearzeit überprüfen (richtige Klammerung und korrekte Verteilung von $\vee$ und $\wedge$, einfach von links nach rechts). Die beiden Kriterien können also in Linearzeit überprüft werden. Also ist L' in $\mathbf{P}$.

Anmerkung: Dasselbe gilt für Erfüllbarkeit in DNF.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für beliebige Formeln F, G, H :

Lösung

Wir definieren zunächst eine unerfüllbare Formel $\perp = (A \wedge \neg A)$ und eine gültige Formel $\top = (A \vee \neg A)$. Diese werden in den Aufgaben häufiger Anwendung finden.

- (a) Wenn $(F \vee G)$ erfüllbar ist, dann ist auch F erfüllbar.

Lösung

Falsch. Sei $F = \perp$ und $G = A$. Dann ist $(F \vee G)$ erfüllbar (mit $\mathcal{B}(A) = 1$), aber F ist unerfüllbar.

- (b) Wenn $(F \wedge G)$ erfüllbar ist, dann ist auch F erfüllbar.

Lösung

Wahr. Wenn $(F \wedge G)$ erfüllbar ist, so gibt es eine zu $(F \wedge G)$ passende Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \models (F \wedge G)$. Daraus folgt auch $\mathcal{B} \models F$, also ist F erfüllbar.

- (c) Wenn $(F \leftrightarrow G)$ erfüllbar ist, dann ist $(F \leftrightarrow G)$ auch gültig.

Lösung

Falsch. Sei $F = A$ und $G = B$. Dann ist $(F \leftrightarrow G)$ erfüllbar mit $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(B) = 1$ (oder $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(B) = 0$), aber nicht gültig, denn z.B. gilt für $\mathcal{B}(A) = 0$ und $\mathcal{B}(B) = 1$, dass $\mathcal{B} \not\models (F \leftrightarrow G)$.

- (d) Wenn $(F \wedge G)$ unerfüllbar ist, dann ist F unerfüllbar oder G unerfüllbar.

Lösung

Falsch. Sei $F = A$ und $G = \neg A$. Dann ist $(F \wedge G)$ unerfüllbar, aber F und G sind jeweils erfüllbar.

- (e) Wenn $(F \vee G)$ gültig ist, dann ist F erfüllbar oder G erfüllbar.

Lösung

Wahr. Sei $(F \vee G)$ gültig und sei $\mathcal{B}$ eine zu $(F \vee G)$ passende Belegung. (Zu jeder Formel F existiert mindestens eine passende Belegung $\mathcal{B}: D \rightarrow \{0, 1\}$, wobei D die atomaren Formeln sind, die in F vorkommen.) Da $(F \vee G)$ gültig ist, gilt $\mathcal{B} \models (F \vee G)$. Deshalb gilt auch, dass $\mathcal{B} \models F$ oder $\mathcal{B} \models G$. Somit ist F erfüllbar oder G erfüllbar.

- (f) Wenn F und G erfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.

Lösung

Falsch. Sei $F = \top$ und $G = A$. Dann sind F und G erfüllbar, aber F ist gültig, d.h. $\mathcal{B} \models F$ für jedes zu F passende $\mathcal{B}$. Für $\mathcal{B}(A) = 0$ gilt aber $\mathcal{B} \not\models G$. Somit gilt $F \not\equiv G$.

- (g) Wenn F und G unerfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.

Lösung

Wahr. Seien F und G unerfüllbar. Für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt also $\mathcal{B} \not\models F$ und $\mathcal{B} \not\models G$, d.h. $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$, also $F \equiv G$.

Bemerkung: Die Aussage gilt auch, wenn F und G gültig sind.