

## Übungsblatt 10

### Aufgabe 1

Beantworten Sie folgende Fragen durch Anwenden des Markierungsalgorithmus. (Hinweis: Wir lassen einige der Klammern zwecks besserer Lesbarkeit weg.)

(a) Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar?

$$(1) (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge \neg C \wedge A \wedge D \wedge (\neg D \vee B)$$

#### Lösung

Diese Formel ist äquivalent zu

$$(A \wedge B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (1 \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow B).$$

- Markiere  $A$  wegen  $1 \rightarrow A$  und markiere  $D$  wegen  $1 \rightarrow D$ .
- Markiere  $B$  wegen  $D \rightarrow B$  und weil  $D$  markiert und  $B$  nicht markiert ist.
- Markiere  $C$  wegen  $A \wedge B \rightarrow C$  und weil  $A$  und  $B$  markiert sind und  $C$  nicht markiert ist.
- Gib "unerfüllbar" aus, weil  $C \rightarrow 0$  und  $C$  markiert ist.

Die Formel ist also unerfüllbar.

$$(2) (C \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee D \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E \vee F) \wedge A \wedge \neg F$$

#### Lösung

Diese Formel ist äquivalent zu

$$(A \rightarrow C) \wedge (A \wedge B \wedge C \rightarrow D) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (D \wedge E \rightarrow F) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (F \rightarrow 0).$$

- Markiere  $A$  wegen  $1 \rightarrow A$ .
- Markiere  $C$  wegen  $A \rightarrow C$  und weil  $A$  markiert und  $C$  nicht markiert ist.
- Markiere  $B$  wegen  $A \rightarrow B$  und weil  $A$  markiert und  $B$  nicht markiert ist.
- Markiere  $D$  wegen  $A \wedge B \wedge C \rightarrow D$  und weil  $A$ ,  $B$  und  $C$  markiert sind und  $D$  nicht markiert ist.
- Gib "erfüllbar" aus.

Die Formel ist also erfüllbar.

(b) Welche der folgenden Formeln sind gültig?

$$(1) (\neg B \wedge C) \vee C \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee \neg A$$

**Lösung**

Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \neg((\neg B \wedge C) \vee C \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee \neg A) \\ \equiv & (B \vee \neg C) \wedge \neg C \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge A \\ \equiv & (C \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow 0) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge (1 \rightarrow A) \end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

- Markiere  $A$  wegen  $1 \rightarrow A$ .
- Markiere  $B$  wegen  $A \rightarrow B$  und weil  $A$  markiert und  $B$  nicht markiert ist.
- Gib "erfüllbar" aus.

Die Formel ist also nicht gültig.

$$(2) (A \wedge D \wedge \neg I) \vee (B \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge H) \vee (\neg E \wedge F) \vee (\neg C \wedge F) \vee (G \wedge \neg H) \vee \neg B \vee \neg F \vee \neg G \vee I$$

**Lösung**

Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \neg((A \wedge D \wedge \neg I) \vee (B \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge H) \\ & \vee (\neg E \wedge F) \vee (\neg C \wedge F) \vee (G \wedge \neg H) \vee \neg B \vee \neg F \vee \neg G \vee I) \\ \equiv & (A \wedge D \rightarrow I) \wedge (B \wedge E \rightarrow D) \wedge (B \wedge C \wedge H \rightarrow A) \\ & \wedge (F \rightarrow E) \wedge (F \rightarrow C) \wedge (G \rightarrow H) \wedge (1 \rightarrow B) \wedge (1 \rightarrow F) \wedge (1 \rightarrow G) \wedge (I \rightarrow 0) \end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

- Markiere  $B$  wegen  $1 \rightarrow B$ , markiere  $F$  wegen  $1 \rightarrow F$  und markiere  $G$  wegen  $1 \rightarrow G$ .
- Markiere  $E$  wegen  $F \rightarrow E$  und weil  $F$  markiert und  $E$  nicht markiert ist.
- Markiere  $C$  wegen  $F \rightarrow C$  und weil  $F$  markiert und  $C$  nicht markiert ist.
- Markiere  $D$  wegen  $B \wedge E \rightarrow D$  und weil  $B$  und  $E$  markiert sind und  $D$  nicht markiert ist.
- Markiere  $H$  wegen  $G \rightarrow H$  und weil  $G$  markiert und  $H$  nicht markiert ist.
- Markiere  $A$  wegen  $B \wedge C \wedge H \rightarrow A$  und weil  $B$ ,  $C$  und  $H$  markiert sind und  $A$  nicht markiert ist.
- Markiere  $I$  wegen  $A \wedge D \rightarrow I$  und weil  $A$  und  $D$  markiert sind und  $I$  nicht markiert ist.
- Gib "unerfüllbar" aus, weil  $I \rightarrow 0$  und  $I$  markiert ist.

Die Formel ist also gültig.

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$$(1) \neg C \vee \neg D \vee E, A, \neg A \vee C \vee \neg B \models E \vee \neg B$$

**Lösung**

Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & (\neg C \vee \neg D \vee E) \wedge A \wedge (\neg A \vee C \vee \neg B) \wedge \neg(E \vee \neg B) \\ \equiv & (\neg C \vee \neg D \vee E) \wedge A \wedge (\neg A \vee C \vee \neg B) \wedge \neg E \wedge B \\ \equiv & (C \wedge D \rightarrow E) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (A \wedge B \rightarrow C) \wedge (E \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow B) \end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

- Markiere  $A$  wegen  $1 \rightarrow A$  und markiere  $B$  wegen  $1 \rightarrow B$ .
- Markiere  $C$  wegen  $A \wedge B \rightarrow C$  und weil  $A$  und  $B$  markiert sind und  $C$  nicht markiert ist.
- Gib "erfüllbar" aus.

Die Aussage ist also falsch.

$$(2) A \vee \neg B \vee \neg D, \neg B \vee \neg G \vee F, \neg A \vee E \vee \neg C \vee \neg F, B, D \models E \vee \neg G \vee (\neg C \wedge D)$$

**Lösung**

Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & (A \vee \neg B \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg G \vee F) \wedge (\neg A \vee E \vee \neg C \vee \neg F) \\ & \wedge B \wedge D \wedge \neg(E \vee \neg G \vee (\neg C \wedge D)) \\ \equiv & (A \vee \neg B \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg G \vee F) \wedge (\neg A \vee E \vee \neg C \vee \neg F) \\ & \wedge B \wedge D \wedge \neg E \wedge G \wedge (C \vee \neg D) \\ \equiv & (B \wedge D \rightarrow A) \wedge (B \wedge G \rightarrow F) \wedge (A \wedge C \wedge F \rightarrow E) \\ & \wedge (1 \rightarrow B) \wedge (1 \rightarrow D) \wedge (E \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow G) \wedge (D \rightarrow C) \end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

- Markiere  $B$  wegen  $1 \rightarrow B$ , markiere  $D$  wegen  $1 \rightarrow D$  und markiere  $G$  wegen  $1 \rightarrow G$ .
- Markiere  $A$  wegen  $B \wedge D \rightarrow A$  und weil  $B$  und  $D$  markiert sind und  $A$  nicht markiert ist.
- Markiere  $F$  wegen  $B \wedge G \rightarrow F$  und weil  $B$  und  $G$  markiert sind und  $F$  nicht markiert ist.
- Markiere  $C$  wegen  $D \rightarrow C$  und weil  $D$  markiert und  $C$  nicht markiert ist.
- Markiere  $E$  wegen  $A \wedge C \wedge F \rightarrow E$  und weil  $A$ ,  $C$  und  $F$  markiert sind und  $E$  nicht markiert ist.
- Gib "unerfüllbar" aus, weil  $E \rightarrow 0$  und  $E$  markiert ist.

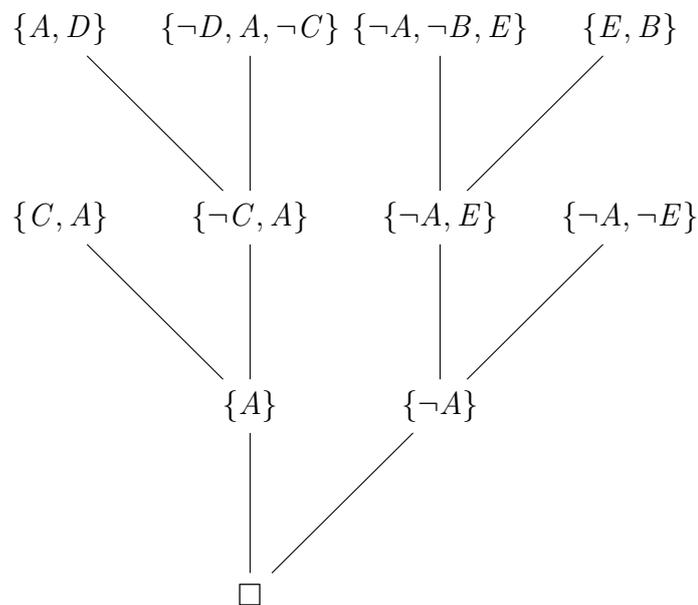
Die Aussage ist also wahr.

## Aufgabe 2

Überprüfen Sie mit dem Resolutionsverfahren, welche der folgenden Klauselmengen erfüllbar sind.

- (a)  $\{\{-E, \neg A\}, \{\neg D, A, \neg C\}, \{A, D\}, \{A, C\}, \{\neg A, \neg B, E\}, \{E, B\}\}$

### Lösung

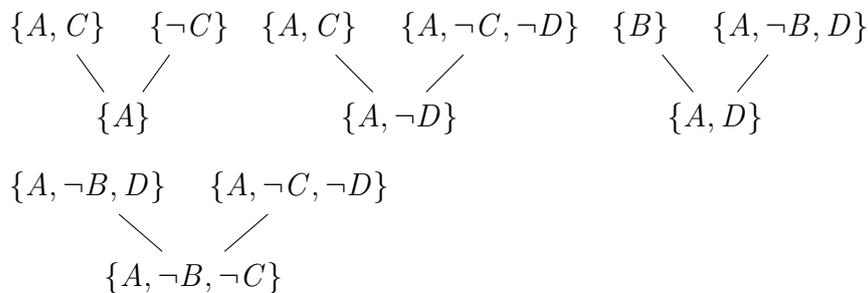


Die Klauselmenge ist also unerfüllbar.

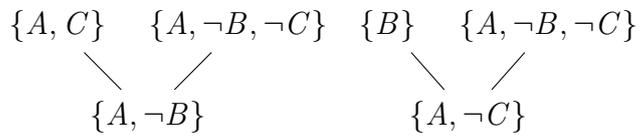
- (b)  $\{\{A, C\}, \{B\}, \{\neg C\}, \{A, \neg B, D\}, \{A, \neg C, \neg D\}\}$

### Lösung

Aus den Ausgangsklauseln können wir folgende neue Klauseln resolvieren:



Danach können wir noch zwei neue Klauseln resolvieren:

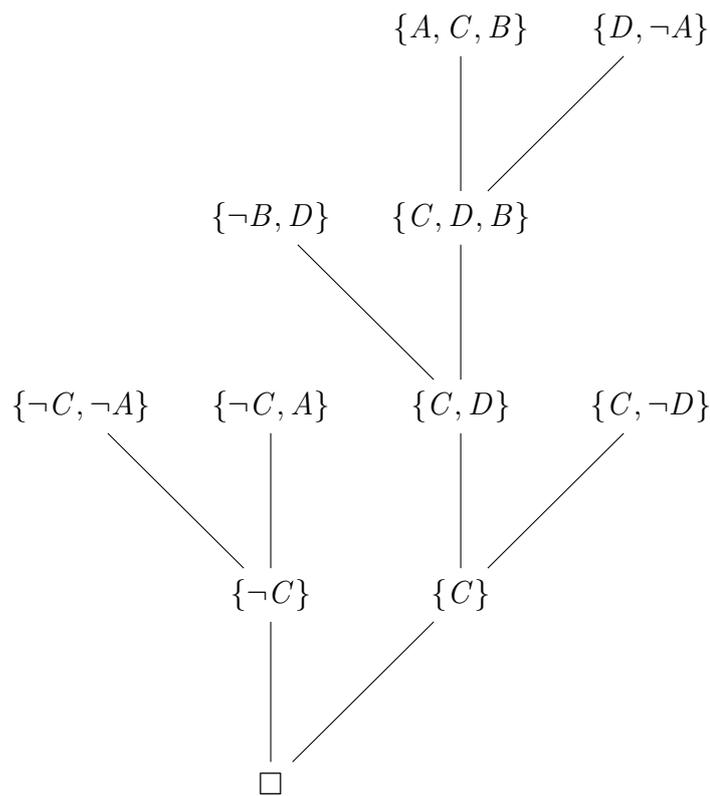


Nun sind keine weiteren Resolutionsschritte mehr möglich. Da wir nicht die leere Klausel  $\square$  herleiten konnten, ist die Klauselmenge erfüllbar.

Es wäre ebenfalls erlaubt zu argumentieren, dass man ohne das  $\neg A$  für keines der vier atomaren Formeln ein Klausel-Paar  $(\{L\}, \{\neg L\})$  ableiten kann.

- (c)  $\{\{\neg C, A\}, \{C, \neg D\}, \{D, \neg B\}, \{D, \neg A\}, \{\neg A, \neg C\}, \{A, C, B\}\}$

**Lösung**



Die Klauselmenge ist also unerfüllbar.

### Aufgabe 3

Berechnen Sie  $\text{Res}^i(F)$  für  $i = 0, 1, \dots$  für die Formel  $F$  mit Klauselmenge

$$\{\{A, \neg B\}, \{A, B, \neg C\}, \{B, C\}, \{\neg A, \neg C\}\}.$$

Was ist die kleinste Zahl  $n$  mit  $\text{Res}^n(F) = \text{Res}^*(F)$ ?

### Lösung

Es gilt  $\text{Res}^0(F) = F$ . Des Weiteren gilt

$$\text{Res}^1(F) = \text{Res}^0(F) \cup \{\{A, \neg C\}, \{A, C\}, \{\neg B, \neg C\}, \{A, B\}, \{B, \neg C\}, \{\neg A, B\}\},$$

$$\text{Res}^2(F) = \text{Res}^1(F) \cup \{\{A\}, \{A, \neg A\}, \{B, \neg B\}, \{C, \neg C\}, \{B\}, \{\neg C\}\}$$

und  $\text{Res}^{i+2}(F) = \text{Res}^2(F)$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , also  $\text{Res}^*(F) = \text{Res}^2(F)$ .