

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Sei P ein einstelliges und R ein zweistelliges Relationssymbol; außerdem sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Wobei handelt es sich um prädikatenlogische Formeln?

- (a) $\exists x \neg P(x)$
- (b) $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow f(R(x, y)))$
- (c) $f(x) = f(x)$
- (d) $\forall n \exists p \exists q n = p \cdot q$
- (e) $\exists x \forall y (P(y) \vee \neg \forall x R(x, f(x)))$
- (f) $P(x)$
- (g) $f(f(x))$

Aufgabe 2

Gegeben sei folgende Formel

$$F = ((Q(x) \vee \exists x \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a))) \vee \forall x R(x, z, g(x)))$$

- (a) Geben Sie alle Teilformeln und Terme an, die in F vorkommen.
- (b) Welche der Teilformeln sind Aussagen?
- (c) Geben Sie für jede Variable an, ob sie frei oder gebunden in F vorkommt.
- (d) Geben Sie die Matrix von F an.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$, wobei $U_{\mathcal{A}}$ die Menge aller Menschen ist und $I_{\mathcal{A}}$ die folgende Interpretation ist:

- $W^{\mathcal{A}}(x)$: x ist weiblich
- $K^{\mathcal{A}}(x, y)$: x kennt y

- $v^{\mathcal{A}}(x) = y$: y ist biologischer Vater von x
- $m^{\mathcal{A}}(x) = y$: y ist biologischer Mutter von x
- $a^{\mathcal{A}}$ ist Adam, $e^{\mathcal{A}}$ ist Eva

Was bedeuten die folgenden prädikatenlogischen Formeln?

- (a) $\forall x W(m(x))$
- (b) $(v(x) = a \wedge K(x, e))$
- (c) $\exists x (W(x) \wedge K(a, x))$
- (d) $\neg \exists x \forall y (W(y) \rightarrow K(x, y))$
- (e) $\forall x \neg (\exists y v(y) = x \wedge \exists y m(y) = x)$
- (f) $\exists x \exists y (K(x, y) \wedge \neg K(y, x))$

Aufgabe 4

Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein zweistelliges Prädikatensymbol R . Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0, 1, 2\}, I_{\mathcal{C}})$, wobei $f^{\mathcal{C}}(x, y) = x$, $R^{\mathcal{C}} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$,
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$, wobei $f^{\mathcal{N}}(x, y) = x \cdot y$, $R^{\mathcal{N}} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$,
- $\mathcal{P} = (2^{\mathbb{N}}, I_{\mathcal{P}})$, wobei $f^{\mathcal{P}}(x, y) = x \cap y$, $R^{\mathcal{P}} = \{(x, y) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid x \subseteq y\}$.

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

- (a) $F_a = \exists x \forall y R(y, x)$
- (b) $F_b = \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$
- (c) $F_c = \forall x \forall y \forall z \forall w ((R(x, y) \wedge R(z, w)) \rightarrow R(f(x, z), f(y, w)))$

Aufgabe 5

Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, I_{\mathcal{N}})$ die Struktur mit den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ und der Gleichheit $=$, welche alle die übliche Bedeutung haben sollen, also $I_{\mathcal{N}}(+)(x, y) = x + y$ und $I_{\mathcal{N}}(\cdot)(x, y) = x \cdot y$. Bei dem Symbol $=$ gehen wir immer davon aus, dass es mit der Gleichheit interpretiert wird, also $I_{\mathcal{N}}(=) = \{(x, x) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2 \mid x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln.

- (a) x ist ungerade.
- (b) $x < y$.
- (c) y ist Vielfaches von x .
- (d) x ist gleich 1.
- (e) $x \bmod y = z$.
- (f) Es gibt keine größte natürliche Zahl.
- (g) x ist eine Primzahl.