Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Zeigen Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob sie gültig, unerfüllbar, oder erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a = \forall x \exists y (P(x) \rightarrow P(y))$

Lösung

Gültig. Sei $\mathcal{A}$ eine zu F_a passende Struktur und sei $d \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Im Fall, dass $d \notin P^{\mathcal{A}}$, gilt auch $\mathcal{A}_{[x/d][y/d']} \models (P(x) \rightarrow P(y))$ für alle $d' \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Wenn $d \in P^{\mathcal{A}}$, dann gilt $\mathcal{A}_{[x/d][y/d]} \models (P(x) \rightarrow P(y))$. In beiden Fällen gilt also $\mathcal{A}_{[x/d]} \models \exists y (P(x) \rightarrow P(y))$. Insgesamt gilt daher $\mathcal{A} \models F_a$.

(b) $F_b = \forall x (R(x, y) \wedge f(x) = y)$

Lösung

Erfüllbar, aber nicht gültig. Es gilt $\mathcal{A} \models F_b$ mit $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \{0\}$, $y^{\mathcal{A}} = 0$, $R^{\mathcal{A}} = \mathcal{U}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ und $f^{\mathcal{A}}(x) = x$. Außerdem gilt für jede zu F_b passende Struktur $\mathcal{B}$ mit $R^{\mathcal{B}} = \emptyset$, dass $\mathcal{B} \not\models F_b$, zum Beispiel für $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \{0\}$, $y^{\mathcal{B}} = 0$, $R^{\mathcal{B}} = \emptyset$ und $f^{\mathcal{B}}(x) = x$.

(c) $F_c = (\forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow S(x, y)) \wedge \forall x \forall y (S(x, y) \rightarrow R(x, y)) \wedge \neg R(a, b))$

Lösung

Unerfüllbar. Sei $\mathcal{A}$ eine zu F_c passende Struktur, wobei wir annehmen, dass $\mathcal{A} \models F_c$. Wegen $\mathcal{A} \models \neg R(a, b)$, muss $(a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}) \notin R^{\mathcal{A}}$ gelten. Wenn $a^{\mathcal{A}} = b^{\mathcal{A}}$, so ist dies ein Widerspruch zu $\mathcal{A} \models \forall x R(x, x)$. Sei also $a^{\mathcal{A}} \neq b^{\mathcal{A}}$. Wegen $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow S(x, y))$, gilt also, dass $(a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}) \in S^{\mathcal{A}}$. Wegen $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (S(x, y) \rightarrow R(x, y))$, folgt dann auch, dass $(a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}) \in R^{\mathcal{A}}$, was aber ein Widerspruch zu $(a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}) \notin R^{\mathcal{A}}$ ist. Insgesamt muss also $\mathcal{A} \not\models F_c$ gelten.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass folgende Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a := \forall y \exists x f(x) = y$

Lösung

Es gilt $\mathcal{A} \models F_a$ mit $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \{0\}$ und $f^{\mathcal{A}}(x) = 0$. Außerdem gilt $\mathcal{B} \not\models F_a$ mit $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \{0, 1\}$ und $f^{\mathcal{B}}(x) = 0$.

(b) $F_b := \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

Lösung

Es gilt $\mathcal{A} \models F_b$ mit $\mathcal{U}_A = \{0\}$ und $f^A(x) = 0$. Außerdem gilt $\mathcal{B} \not\models F_b$ mit $\mathcal{U}_B = \{0, 1\}$ und $f^B(x) = 0$.

(c) $F_c := (\exists y \forall x f(x) = g(x, y) \wedge \exists x f(x) \neq g(x, x))$

Lösung

Sei $\mathcal{A}$ definiert als $\mathcal{U}_A = \{0, 1\}$, $f^A(x) = x$, $g^A(x, 0) = x$ und $g^A(x, 1) = 0$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \exists y \forall x f(x) = g(x, y)$, weil $\mathcal{A}_{[x/d][y/0]}(f(x)) = d$ und $\mathcal{A}_{[x/d][y/0]}(g(x, y)) = d$ für alle $d \in \{0, 1\}$. Außerdem gilt $\mathcal{A} \models \exists x f(x) \neq g(x, x)$, weil $\mathcal{A}_{[x/1]}(f(x)) = 1$ und $\mathcal{A}_{[x/1]}(g(x, x)) = 0$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models F_c$. Mit $\mathcal{U}_B = \{0\}$, $f^B(x) = 0$ und $g^B(x, y) = 0$ gilt $\mathcal{B} \not\models F_c$, weil $\mathcal{B} \not\models \exists x f(x) \neq g(x, x)$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie folgende Behauptungen für beliebige Formeln F und G :

(a) $\exists x(F \wedge G) \models (\exists xF \wedge \exists xG)$

Lösung

Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die zu F und G passend ist, und gelte $\mathcal{A} \models \exists x(F \wedge G)$. Dann gibt es ein $d \in \mathcal{U}_A$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \wedge G)$. Also gibt es ein $d \in \mathcal{U}_A$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ und $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Somit gibt es ein $d \in \mathcal{U}_A$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ und es gibt ein $d \in \mathcal{U}_A$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Daraus folgt, dass $\mathcal{A} \models \exists xF$ und $\mathcal{A} \models \exists xG$, also $\mathcal{A} \models (\exists xF \wedge \exists xG)$.

(b) $\forall x(F \rightarrow G) \models (\forall xF \rightarrow \forall xG)$

Lösung

Sei $\mathcal{A}$ eine zu F und G passende Struktur und gelte $\mathcal{A} \models \forall x(F \rightarrow G)$. Daraus folgt, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \rightarrow G)$ für alle $d \in \mathcal{U}_A$. Das heißt, dass für jedes $d \in \mathcal{U}_A$ gilt, dass wenn $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$, dann gilt auch $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Gelte nun außerdem $\mathcal{A} \models \forall xF$, woraus folgt, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ für alle $d \in \mathcal{U}_A$. Zusammen erhalten wir also, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$ für alle $d \in \mathcal{U}_A$, also $\mathcal{A} \models \forall xG$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models (\forall xF \rightarrow \forall xG)$.

(c) $(\exists xF \vee \exists xG) \equiv \exists x(F \vee G)$

Lösung

Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die zu F und G passend. Gelte außerdem $\mathcal{A} \models (\exists xF \vee \exists xG)$. Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Im ersten Fall gilt $\mathcal{A} \models \exists xF$. Daraus folgt, dass es ein $d \in \mathcal{U}_A$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$. Das heißt auch, dass es ein $d \in \mathcal{U}_A$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder dass es ein $d \in \mathcal{U}_A$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Also gibt es ein $d \in \mathcal{U}_A$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Das heißt, es gibt ein $d \in \mathcal{U}_A$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \vee G)$, also $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$. Der zweite Fall, also $\mathcal{A} \models \exists xG$, ist analog.

Gelte nun $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$. Das heißt, es gibt ein $d \in \mathcal{U}_A$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \vee G)$. Somit gibt es ein $d \in \mathcal{U}_A$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Es gibt also ein $d \in \mathcal{U}_A$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder es gibt ein $d \in \mathcal{U}_A$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Also folgt $\mathcal{A} \models \exists xF$ oder $\mathcal{A} \models \exists xG$. Insgesamt folgt dann auch $\mathcal{A} \models (\exists xF \vee \exists xG)$.

(d) $(\exists xF \wedge \exists xG) \not\equiv \exists x(F \wedge G)$

Lösung

Sei $F = P(x)$ und $G = Q(x)$. Sei außerdem $\mathcal{B}$ definiert als $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \{0, 1\}$ mit $P^{\mathcal{B}} = \{0\}$ und $Q^{\mathcal{B}} = \{1\}$. Es gilt $\mathcal{B} \models \exists xP(x)$ und $\mathcal{B} \models \exists xQ(x)$, also $\mathcal{B} \models (\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x))$. Auf der anderen Seite gilt $\mathcal{B}_{[x/0]} \not\models Q(x)$ und $\mathcal{B}_{[x/1]} \not\models P(x)$. Das heißt, es gibt kein $d \in \{0, 1\}$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]} \models P(x)$ und $\mathcal{B}_{[x/d]} \models Q(x)$. Also es gibt kein $d \in \{0, 1\}$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]} \models (P(x) \wedge Q(x))$. Daraus folgt, dass $\mathcal{B} \not\models \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

Aufgabe 4

Geben Sie für die folgende Formel zunächst eine zu ihr äquivalente BPF an. Überführen Sie diese anschließend in Skolemform.

$$F = \left(\forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow \exists r R(r, f(y, z))) \wedge \forall x \neg \exists z (P(z) \wedge \forall w R(x, w)) \right)$$

Lösung

Der Beweis zum Satz auf Folie 329 (Für jede Formel gibt es eine äquivalente Formel in BPF) wurde mit Induktion über den Formelaufbau geführt. Wir verwenden hier stattdessen einen globalen Ansatz, um die BPF herzustellen.

Zunächst benennen wir alle gebundenen Variablen um. Ein einfacher Ansatz ist, diese durchnummerieren, also aus x wird x_1 , x_2 , usw.

$$F \equiv \left(\forall x_1 \exists y_1 (R(x_1, y_1) \rightarrow \exists r_1 R(r_1, f(y_1, z))) \wedge \forall x_2 \neg \exists z_1 (P(z_1) \wedge \forall w_1 R(x_2, w_1)) \right)$$

Als Nächstes ersetzen wir alle syntaktischen Abkürzungen wie $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ durch die Basis-syntax, die nur $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ verwendet.

$$F \equiv \left(\forall x_1 \exists y_1 (\neg R(x_1, y_1) \vee \exists r_1 R(r_1, f(y_1, z))) \wedge \forall x_2 \neg \exists z_1 (P(z_1) \wedge \forall w_1 R(x_2, w_1)) \right)$$

Quantoren lassen sich einfach über $\wedge$ und $\vee$ ziehen, aber nicht über $\neg$. Deshalb schieben wir die $\neg$ so weit nach innen, dass sie nur noch unter, aber nicht über Quantoren vorkommen. Dazu verwenden wir die Äquivalenzen $\forall xF \equiv \neg \exists x \neg F$ und $\exists xF \equiv \neg \forall x \neg F$, wobei F eine beliebige Formel ist.

$$F \equiv \left(\forall x_1 \exists y_1 (\neg R(x_1, y_1) \vee \exists r_1 R(r_1, f(y_1, z))) \wedge \forall x_2 \forall z_1 (\neg P(z_1) \vee \exists w_1 \neg R(x_2, w_1)) \right)$$

Wie bereits besprochen, lassen sich dann die Quantoren einfach nach vorne ziehen:

$$F \equiv \forall x_1 \exists y_1 \exists r_1 \forall x_2 \forall z_1 \exists w_1 \left((\neg R(x_1, y_1) \vee R(r_1, f(y_1, z))) \wedge (\neg P(z_1) \vee \neg R(x_2, w_1)) \right)$$

Der Algorithmus zum Herstellen der Skolemform auf Folie 334 ist auch induktiv formuliert. Wir verwenden auch hier wieder einen globalen Ansatz und führen alle Ersetzungen der $\exists$ parallel aus.

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall z_1 \left((\neg R(x_1, f_{y_1}(x_1)) \vee R(f_{r_1}(x_1), f(f_{y_1}(x_1), z))) \wedge (\neg P(z_1) \vee \neg R(x_2, f_{w_1}(x_1, x_2, z_1))) \right)$$