Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 13

Aufgabe 1
Überführen Sie die folgenden Formeln jeweils in eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage in Klauselform, indem Sie wie auf Folie 350 beschrieben vorgehen:

Lösung
Auf dem letzten Blatt haben wir eine Formel zunächst in BPF und anschließend in Skolemform überführt. Zusätzlich dazu müssen wir nun zwei weitere Dinge tun: Wir müssen eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage herstellen. Eine Aussage darf keine freien Variablen enthalten, was wir dadurch erreichen, dass wir jede freie Variable durch eine neue Konstante ersetzen. Außerdem muss die neue Formel in Klauselform sein. Das heißt, ihre Matrix (die Formel ohne Quantoren) muss in KNF sein.

(a) $F_a = (\forall y(\forall x R(x) \to Q(y,z)) \wedge \forall x P(x))$

Lösung
Bereinigen: $(\forall y_1(\forall x_1 R(x_1) \to Q(y_1,z)) \wedge \forall x_2 P(x_2))$

Frei vorkommende Variablen ersetzen: $(\forall y_1(\forall x_1 R(x_1) \to Q(y_1,a_z)) \wedge \forall x_2 P(x_2))$

Pränexform:

- Grundform mit $\wedge$,$\vee$,$\neg$: $(\forall y_1(\neg\forall x_1 R(x_1) \vee Q(y_1,a_z)) \wedge \forall x_2 P(x_2))$
- Reinziehen von $\neg$: $(\forall y_1(\exists x_1 \neg R(x_1) \vee Q(y_1,a_z)) \wedge \forall x_2 P(x_2))$
- Quantoren nach vorne: $\forall y_1 \exists x_1 \forall x_2((\neg R(x_1) \vee Q(y_1,a_z)) \wedge P(x_2))$

Skolemform: $\forall y_1 \forall x_2((\neg R(f_{x_1}(y_1)) \vee Q(y_1,a_z)) \wedge P(x_2))$

Die Matrix der Formel ist bereits in KNF.

(b) $F_b = \forall z(\exists y \neg(R(y) \vee \forall x R(x)) \vee \forall x Q(z,w))$

Lösung
Bereinigen: $\forall z_1(\exists y_1 \neg(R(y_1) \vee \forall x_1 R(x_1)) \vee \forall x_2 Q(z_1,w))$

Frei vorkommende Variablen ersetzen: $\forall z_1(\exists y_1 \neg(R(y_1) \vee \forall x_1 R(x_1)) \vee \forall x_2 Q(z_1,a_w))$

Pränexform:

- Grundform mit $\wedge$,$\vee$,$\neg$: Die Formel ist bereits in Grundform.
- Reinziehen von $\neg$: $\forall z_1(\exists y_1(\neg R(y_1) \wedge \exists x_1 \neg R(x_1)) \vee \forall x_2 Q(z_1,a_w))$
- Quantoren nach vorne: $\forall z_1 \exists y_1 \exists x_1 \forall x_2((\neg R(y_1) \wedge \neg R(x_1)) \vee Q(z_1,a_w))$

Skolemform: $\forall z_1 \forall x_2((\neg R(f_{y_1}(z_1)) \wedge \neg R(f_{x_1}(z_1))) \vee Q(z_1,a_w))$

Matrix in KNF: $\forall z_1 \forall x_2((\neg R(f_{y_1}(z_1)) \vee Q(z_1,a_w)) \wedge (\neg R(f_{x_1}(z_1)) \vee Q(z_1,a_w)))$

Aufgabe 2
Betrachten Sie die folgende Aussage:

$$F = (P(a) \wedge \forall x(P(x) \to \big(\neg P(s(x)) \wedge P(s(s(x)))\big)))$$

(a) Geben Sie das Herbrand-Universum $D(\mathcal{F})$ an, wobei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionssymbole in der Formel F ist.

Lösung
Es gilt $\mathcal{F} = \{a, s\}$. Also ist das Herbrand-Universum

$$D(\mathcal{F}) = \{a, s(a), s(s(a)), \dots\} = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Geben Sie ein Herbrand-Modell $\mathcal{A}$ für F an. Beschreiben Sie $\mathcal{A}$ in einfachen Worten.

Lösung
Ein Term $s^n(a) \in D(\mathcal{F})$ kann als Darstellung der natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ aufgefasst werden. Idee: P bedeutet „gerade“ und s bedeutet „Nachfolger“. Damit sagt $P(a)$, dass 0 gerade ist, und $(P(x) \to \big(\neg P(s(x)) \wedge P(s(s(x)))\big))$ sagt: Für jede gerade natürliche Zahl n gilt, dass $n+1$ nicht gerade ist und $n+2$ gerade ist.

Wir definieren also $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = D(\mathcal{F})$, wobei $a^{\mathcal{A}} = s^0(a)$, $s^{\mathcal{A}}(s^n(a)) = s(s^n(a)) = s^{n+1}(a)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $P^{\mathcal{A}} = \{s^{2n}(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Damit ist $\mathcal{A}$ eine Herbrand-Struktur und es gilt $\mathcal{A} \models F$.

(c) Berechnen Sie die Herbrand-Expansion $E(G)$, wobei G die Skolemform von F ist.

Lösung
Zunächst müssen wir die Formel F in ihre Skolemform überführen. Dazu geben wir im ersten Schritt erst einmal ihre BPF an:

$$F \equiv \forall x(P(a) \wedge (\neg P(x) \vee \big(\neg P(s(x)) \wedge P(s(s(x)))\big)))$$

Somit ist dies auch die gesuchte Skolemform G. Sei nun $\mathcal{F}'$ die Menge der Funktionssymbole aus G, also $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Folglich ist $D(\mathcal{F}') = D(\mathcal{F})$ (siehe a). Wir erhalten als Herbrand-Expansion also

$$\begin{aligned} E(G) &= \{(P(a) \wedge (\neg P(s^n(a)) \vee \big(\neg P(s^{n+1}(a)) \wedge P(s^{n+2}(a))\big))) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{(P(a) \wedge (P(s^n(a)) \to \big(\neg P(s^{n+1}(a)) \wedge P(s^{n+2}(a))\big))) \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

(d) Geben Sie ein (aussagenlogisches) Modell von $E(G)$ an.

Lösung
Sei $\mathcal{B}$ eine Belegung wie folgt:

$$\mathcal{B}(P(s^n(a)) = 1 \text{ gdw. } n \text{ gerade ist}$$

Dann ist $\mathcal{B}$ in der Tat ein Modell von $E(G)$, denn $\mathcal{B}(P(a)) = 1$ und (wie bei b) wenn $\mathcal{B}(P(s^n(a))) = 1$ ist, dann ist $\mathcal{B}(P(s^{n+1}(a))) = 0$ und $\mathcal{B}(P(s^{n+2}(a))) = 1$.

Aufgabe 3
Zu einer Menge M von Aussagen in Skolemform schreiben wir $\mathcal{F}(M)$ für die Funktionssymbole, die in M vorkommen. Geben Sie zu den folgenden Formeln F jeweils $\mathcal{F}(\{F\})$, $D(\{F\})$ und $E(\{F\})$ an. Geben Sie anschließend eine unerfüllbare Formel $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_k)$ an mit $F_i \in E(F)$ für $1 \leq i \leq k$.

(a) $F_a = \forall x(P(x) \wedge \neg P(x))$

Lösung
Es gilt $\mathcal{F}(\{F_a\}) = \varnothing$. Wir erhalten also $D(\{F_a\}) = D(\varnothing \cup \{a\}) = \{a\}$. Man beachte, dass die fest gewählte Konstante a hinzugenommen werden muss (siehe Folie 359), weil $\mathcal{F}(\{F_a\})$ keine Konstante enthält. Die Herbrand-Expansion von $\{F_a\}$ ist dann $E(\{F_a\}) = \{(P(a) \wedge \neg P(a))\}$. Die Formel $F_1 = (P(a) \wedge \neg P(a))$ ist unerfüllbar. Sei $\mathcal{B}$ eine zu F_1 passende Struktur mit $\mathcal{B} \models F_1$. Dann gilt auch, dass $\mathcal{B} \models P(a)$, aber somit auch $\mathcal{B} \not\models \neg P(a)$, also $\mathcal{B} \not\models F_1$, was ein Widerspruch ist.

(b) $F_b = \forall x \forall y((\neg P(x) \vee \neg P(f(y))) \wedge P(f(f(x))))$

Lösung
Es gilt, dass $\mathcal{F}(\{F_b\}) = \{f\}$. Wir müssen hier wieder die fest gewählte Konstante a hinzunehmen, also erhalten wir

$$D(\{F_b\}) = D(\{f\} \cup \{a\}) = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Herbrand-Expansion ist dann

$$E(\{F_b\}) = \{((\neg P(f^n(a)) \vee \neg P(f^{m+1}(a))) \wedge P(f^{n+2}(a))) \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Mit $n = 2, m = 1$ und $n = 0, m = 0$ erhalten wir die Formeln

$$F_1 = ((\neg P(f^2(a)) \vee \neg P(f^2(a))) \wedge P(f^4(a))),$$
$$F_2 = ((\neg P(a) \vee \neg P(f(a))) \wedge P(f^2(a))).$$

Dann ist die Formel $F = (F_1 \wedge F_2)$ unerfüllbar. Sei $\mathcal{B}$ eine zu F passende Struktur mit $\mathcal{B} \models F$. Also gilt auch $\mathcal{B} \models F_2$, und somit auch $\mathcal{B} \models P(f^2(a))$. Daraus folgt aber, dass $\mathcal{B} \not\models \neg P(f^2(a))$, also $\mathcal{B} \not\models F_1$ und somit $\mathcal{B} \not\models F$, was ein Widerspruch ist.

Aufgabe 4
Betrachten Sie folgende Eigenschaften einer binären Relation R:

1. R ist nicht leer.
2. R ist reflexiv.
3. R ist irreflexiv.
4. R ist symmetrisch.
5. R ist transitiv.

(a) Formulieren Sie jede Eigenschaft als Formel.

(b) Geben Sie zu jeder Formel ein Modell an.

Lösung (a) Die Eigenschaften entsprechen den folgenden Formeln:

1. $\exists x \exists y R(x, y)$
2. $\forall x R(x, x)$
3. $\forall x \neg R(x, x)$
4. $\forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x))$
5. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z))$

(b) Als Modelle erhalten wir beispielsweise:

1. $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ mit $U_{\mathcal{A}} = \{0\}$, $R^{\mathcal{A}} = \{(0, 0)\}$
2. $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ mit $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}$, $R^{\mathcal{A}} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
3. $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ mit $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$, $R^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x < y\}$
4. $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ mit $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}$, $R^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \neq y\}$
5. $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ mit $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$, $R^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ ist ein Teiler von } y\}$