Klausur zur Vorlesung „Berechenbarkeit und Logik“

SS 2025 / July 21, 2025

Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Aufgabe	**Punktzahl**	**Erreicht**
1	10	
2	6	
3	3	
4	4	
5	5	
6	5	
7	6	
8	6	
9	5	
10	6	
11	6	
12	8	
Bonus	0	
$\boldsymbol{\Sigma}$	70	

Generelle Hinweise:

- Prüfungsdauer: **120 Minuten**
- Wenn Sie in der Klausur **35 Punkte** erreichen, haben Sie mit Sicherheit bestanden.
- Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Benutzen Sie ein **dokumentenechtes Schreibgerät**.
- Überprüfen Sie die Ihnen ausgehändigte Klausur auf Vollständigkeit (**13 Aufgaben** auf 13 Seiten).
- Tragen Sie **auf jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matr.-Nr.** in die entsprechenden Felder ein.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder. Reicht der Platz in einem Feld nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite des entsprechenden Blattes und vermerken Sie dies auf der Vorderseite. Reicht der Platz dennoch nicht aus, können Sie die Aufsicht nach zusätzlichen Blättern fragen.
- Schreiben Sie bitte **deutlich**. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Ein **Täuschungsversuch** führt umgehend zum Ausschluss und **Nichtbestehen**. Es erfolgt keine Vorwarnung.
- Alle mitgeführten **elektronischen Geräte** sind vor der Klausur bzw. spätestens jetzt auszuschalten.

Inhaltliche Hinweise:

- In den WHILE- und LOOP-Programmen dürfen Sie, zusätzlich zur Definition aus der Vorlesung, auch die Addition, Multiplikation, die in der Vorlesung definierte (abgeschnittene) Subtraktion (sub bzw. $-$) und für eine Variable x die Bedingung IF $x = 0$ THEN P END als WHILE- bzw. LOOP-berechenbar voraussetzen und in Ihren Programmen verwenden. Geben Sie an, in welcher Variable der Ausgabewert am Ende steht.
- Sie dürfen annehmen, dass die Addition, Multiplikation und die (abgeschnittene) Subtraktion sub zweier natürlicher Zahlen primitiv-rekursiv sind.
- Für die Konstruktion von μ- bzw. primitiv-rekursiven Funktionen und für WHILE- und LOOP-Programme darf die Schreibweise aus den Übungen benutzt werden.

Aufgabe 1. Beantworten Sie die folgenden vier Fragen. Für jede Teilaufgabe gibt die angegebene volle Punktzahl, wenn Sie die Aufgabe vollständig und korrekt beantwortet haben.

(1) (3 Punkte) Sei L eine entscheidbare Sprache Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
(a) Die charakteristische Funktion χ_L ist Turing-berechenbar.
(b) Die charakteristische Funktion χ_L ist total.
(c) Die "halbe charakteristische Funktion" χ'_L ist primitiv-rekursiv.
(d) L ist semi-entscheidbar und $\overline{L}$ ist entscheidbar.
(e) $\overline{L} \leq L$ und $L \leq \overline{L}$.
(f) Für das Halteproblem H gilt $H \leq \overline{L}$.

(2) (3 Punkte) Sei F eine erfüllbare, aber nicht gültige aussagenlogische Formel. Welche Aussagen sind wahr?
(a) $\neg F \vee F$ ist unerfüllbar.
(b) $\neg F$ ist erfüllbar.
(c) $F \in \mathrm{SAT}$.
(d) Es gibt eine aussagenlog. Formel G, so dass $G \wedge F$ gültig ist.
(e) Es gibt abzählbar unendlich viele Belegungen $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(F) = 1$.
(f) $\neg(F \leftrightarrow \neg F)$ ist gültig.

(3) (2 Punkte) Hat folgende PCP-Instanz eine Lösung? Begründen Sie!

$$\begin{pmatrix} bb & aaab & b & b \\ bbb & aa & ab & bc \end{pmatrix}.$$

(4) (2 Punkte) Nennen Sie drei Algorithmen, um Erfüllbarkeit einer aussagenlogischen Formel zu testen! Die Algorithmen müssen nicht für alle Formeln funktionieren, sondern können auch nur für Spezialfälle anwendbar sein.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

(a) Ihre Firma POOL AG hat ein LOOP-Programm für eine Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ geschrieben:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3^{\min(x,y)+1}, & \text{falls } y^2 \leq t(x) + x, \\ t(x) + x, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei es sich bei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ um die Fibonacci-Zahlen handelt:

$$t(n) = t(n-1) + t(n-2)$$
$$t(0) = 0, \quad t(1) = 1$$

Allerdings weist das Programm ein paar Lücken auf. Ihr Kollege ist gerade im Urlaub und Sie müssen das LOOP-Programm vervollständigen (Eingabe x_1, x_2 und Ausgabe in x_1).

```
x3 := 0;                  \\Berechnung t(x1) + x1
x4 := 1;
LOOP ... END;
```


```
x3 := x3 + x1;            \\Ergebnis steht in x3
x4 := x2 * x2;
x5 := x4 - x3;
IF x5 = 0 THEN            \\Fallunterscheidung (wann Fall 1?)
    x6 := x2 - x1;
    ...;                  \\Minimum steht in x2
```


```
    x3 := 3;              \\Berechnung 1. Fall (3^...)
    ...
```


```
END;
x1 := x3
```

(b) Ihr Chef Dr. Turing verlangt eine weitere Anpassung. Es soll eine Funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ berechnet werden, welche wie folgt definiert ist:

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{falls } x > 42!, \\ \text{undef.,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion g soll also genau für $x \leq 42! = 42 \cdot 41 \cdots 2 \cdot 1$ in eine Endlosschleife geraten und ansonsten wie f definiert sein. Wie müssen Sie Ihren Code anpassen?

Hinweis: Das resultierende Programm muss kein LOOP-Programm mehr sein.

Aufgabe 3. (3 Punkte) Geben Sie an, welche partielle Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ das folgende GoTo-Programm berechnet (Eingabevariablen sind x_1 und x_2, die Ausgabevariable ist x_1):

M_1 : $x_3 := x_1 + x_2$;
$x_4 := x_1 - 5$;
IF $x_4 = 0$ THEN GOTO M_3 ;
GOTO M_2 ;
M_2 : $x_5 := x_1 + x_1$;
GOTO M_4 ;
M_3 : $x_1 := x_1 + 4$;
HALT;
M_4 : $x_5 := x_5 - 12$;
IF $x_5 = 0$ THEN GOTO M_2 ;
$x_1 := x_3 + 1$;
HALT

Aufgabe 4. (4 Punkte) Geben Sie an, welche Funktionen von μf und μg berechnet werden, wobei f und g wie folgt definiert sind.

(a) $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(n, x) = (n - x)^2 - 4$

(b) $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $g(n, x) = (x - 5) - (n \mod 3)$

Aufgabe 5. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind. In dieser Aufgabe dürfen Sie nicht die Äquivalenz zur LOOP-Berechenbarkeit nutzen.

(a) $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(x,y) = |x-y|$

(b) $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $g(y,x) = (x+1)\cdot(x+2)\cdots(x+y+1)$

(c) $h\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(z,x,y) = \begin{cases} x+y & z=0 \\ \max(x\cdot y, y+z)+(x-z) & z>0 \end{cases}$

Aufgabe 6. (5 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) = n + (n \bmod 2)$$

Geben Sie eine Turingmaschine an, die f berechnet.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Eingabezahl n zu Beginn als Binärzahl auf dem Band steht (zum Beispiel steht bei $n = 5$ zu Beginn 101 auf dem Band).

Achten Sie darauf, dass der Leseschreibkopf am Ende auf dem ersten Zeichen der Ausgabe steht.

Aufgabe 7. (6 Punkte) Betrachten Sie das folgende Problem:

$$L = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare aussagenlog. Formel der Form } G \wedge H\}$$

Zeigen Sie, dass L **NP**-vollständig ist.

Hinweis: Dafür dürfen Sie nutzen, das die Menge der erfüllbaren aussagenlog. Formeln SAT **NP**-vollständig ist (Satz von Cook).

Aufgabe 8. (6 Punkte) Zeigen Sie durch geeignetes Anwenden des Markierungsalgorithmus, dass folgende Aussage wahr ist:

$$(\neg E \vee A), (\neg E \vee \neg C \vee D), (\neg E \vee \neg A \vee C), (\neg C \vee \neg A \vee \neg D \vee B) \models (B \vee \neg E)$$

Geben Sie an, welche atomaren Formeln in jedem Schritt markiert werden, jeweils mit Begründung.

Aufgabe 9. (5 Punkte) Verwenden Sie das Resolutionsverfahren der Aussagenlogik, um zu zeigen, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{\neg C\}, \{A, B, C\}, \{\neg A, B\}, \{D, \neg B, \neg E\}, \{E, \neg B\}, \{\neg D, \neg B\}\}$$

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind:

(a) (3 Punkte) $F = \forall x \exists y((P(f(x,x),y) \vee P(y,y)) \wedge \neg P(x, f(x,y)))$

(b) (3 Punkte) $G = \exists x \forall y(R(x, g(x,y)) \wedge \neg R(y,y)) \wedge \forall z(\neg R(a,z))$

Aufgabe 11. (6 Punkte) Gegeben sei die folgende Formel F:

$$\forall x \exists y (P(x, z) \vee Q(f(x, y), f(z, x))) \wedge \forall x (\neg R(g(x, x)))$$

Überführen Sie F in eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage in Klauselform.

Aufgabe 12. Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$, wobei das Universum gegeben ist durch $U_{\mathcal{A}} = \{a, b\}^*$ und die Interpretationsfunktion $I_{\mathcal{A}}$ definiert ist durch:

- $f^{\mathcal{A}}(x, y) = xy$ (die Konkatenation von Wörtern),
- $P^{\mathcal{A}} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält genau ein } a\}$
- $Q^{\mathcal{A}} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ ist gerade }\}$
- $c^{\mathcal{A}} = aaa$

und „=“ wie üblich ein 2-stelliges Prädikatensymbol darstellt, das mit der Gleichheit interpretiert wird. Formulieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln:

(a) (2 Punkte) Für jedes Wort x mit gerader Länge gibt es ein Wort y, dessen Konkatenation mit x ungerade Länge hat.

(b) (2 Punkte) Das Wort aaa enthält genau drei a.

(c) (2 Punkte) Das Wort aaa enthält kein Teilwort, das genau ein a enthält und gerade Länge hat.

(d) (2 Punkte) Jede Kontatenation zweier Wörter ungerader Länge ergibt ein Wort gerader Länge.

Aufgabe 13. (4 Punkte (Bonus))

Gegeben sei folgende Formel:

$$F = \forall x(W(x) \to J(x))$$

Dabei bedeutet $W(x)$, dass x ein Wanderer ist und $J(x)$, dass x gerne joggen geht. Ein Student behauptet, aus dieser Aussage folge direkt

$$\forall x J(x).$$

Wo liegt der Fehler in der Argumentation des Studenten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Kann der Student $\exists x J(x)$ folgern?