

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

- (a) Das folgende LOOP-Programm terminiert nicht.

$$x_1 := 5; \text{ LOOP } x_1 \text{ DO } x_1 := x_1 + 1 \text{ END}$$

- (b) Das folgende WHILE-Programm berechnet die Funktion $f(x) = 1$.

$$\text{WHILE } x \neq 0 \text{ DO } x := x - 2; x := x + 1 \text{ END}$$

Lösung.

- (a) **Falsch.** Die LOOP-Schleife wird $x_1 = 5$ mal ausgeführt; das veränderte x_1 wird nicht erneut gelesen. Grundsätzlich terminieren LOOP-Programme immer.
- (b) **Falsch.** Das Programm berechnet stattdessen die folgende Funktion.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \perp & (x \neq 0) \end{cases}$$

Aufgabe 2. Schreiben Sie jeweils ein LOOP-Programm, das die Funktion berechnet.

$$(a) f(x, y) = x + y \quad (b) g(x, y) = x \cdot y \quad (c) \max(x, y) \quad (d) \min(x, y, z)$$

Lösung. Bei den folgenden LOOP-Programmen verwenden wir die Variable x jeweils als Ausgabevariable. Außerdem werden wir schrittweise einige Kurzformen einführen, die in dieser (und nur in dieser) Form ohne weitere Erklärungen auch in der Klausur verwendet werden dürfen.

- (a) Um die Summe $x + y$ zu berechnen, erhöhen Sie y -fach den Wert von x um eins. Es ergibt sich das folgende LOOP-Programm.

$$\begin{array}{l} \text{LOOP } y \text{ DO} \\ \quad x := x + 1 \\ \text{END} \end{array}$$

Im Folgenden werden wir, zur besseren Lesbarkeit, die Kurzformen

$$x := y + z \quad \text{und} \quad x := y - z$$

verwenden. Hierbei sind x , y und z nicht notwendigerweise verschieden; y und z dürfen dabei sogar Konstanten sein.

- (b) Um das Produkt $x \cdot y$ zu berechnen, gehen wir analog zu Teil (a) vor. Unter Verwendung der dort eingeführten Kurzform erhalten wir das folgende Programm.

```
x' := x; x := 0;
LOOP y DO
    x := x + x'
END
```

Im Folgenden verwenden wir ebenfalls die entsprechende Kurzform $x := y \cdot z$.

In den weiteren Aufgabenteilen benutzen wir auch die Kurzform IF $x = 0$ THEN P END. Die zugehörige Langform ist durch das folgende Programmfragment gegeben, wobei h eine beliebige Variable ist, die im restlichen Programm *nicht* vorkommt.

```
h := 1;
LOOP x DO
    h := 0
END;
LOOP h DO
    P
END
```

- (c) Für den Vergleich von x und y nutzen wir, zusätzlich zu den obigen Kurzformen, die *modifizierte* Subtraktion: Es gilt $x - y = 0$ genau dann, wenn $x \leq y$.

```
h := x - y;
IF h = 0 THEN
    x := y
END
```

- (d) Wir gehen analog zu Teil (c) vor und erhalten das folgende LOOP-Programm.

```
h := y - x;
IF h = 0 THEN
    x := y
END;
h := z - x;
IF h = 0 THEN
    x := z
END
```

Aufgabe 3. Schreiben Sie jeweils ein WHILE-Programm mit folgenden Eigenschaften.

- (a) Auf Eingabe einer Zahl $n \geq 1$ wird der dyadische Logarithmus $\lceil \log_2 n \rceil$ ausgegeben.
- (b) Auf Eingabe einer Zahl $n \geq 2$ wird der kleinste Primteiler p von n ausgegeben.

Lösung.

- (a) Um den dyadischen Logarithmus k der Zahl n zu bestimmen, erhöhen wir, ausgehend von $k = 0$, solange die Zahl k , bis $2^k \geq n$ gilt. Unter Verwendung der Kurzformen für Addition und Multiplikation ergibt sich das folgende Programm.

```

INPUT  $n$ ; OUTPUT  $k$ 
 $k := 0$ ;  $p := 1$ ;  $h := n - p$ ;
WHILE  $h \neq 0$  DO
     $k := k + 1$ ;  $p := 2 \cdot p$ ;  $h := n - p$ 
END

```

- (b) Der kleinste Primteiler p einer Zahl $n \geq 2$ ist gleich dem kleinsten Teiler von n . Es genügt, ausgehend von $p = 2$, die Zahl p solange zu erhöhen, bis $n \equiv 0 \pmod{p}$ gilt. Unter Verwendung der erlaubten Kurzformen ergibt sich das folgende Programm.

```

INPUT  $n$ ; OUTPUT  $p$ 
 $p := 1$ ;  $m := 1$ ;
WHILE  $m \neq 0$  DO
     $p := p + 1$ ;  $m := 0$ ;
    LOOP  $n$  DO
         $m := m + 1$ ;  $h := p - m$ ;
        IF  $h = 0$  THEN  $m := 0$  END
    END
END

```

Aufgabe 4. Bestimmen Sie jeweils die Funktion von \mathbb{N}^k nach \mathbb{N} , die durch das zugehörige Programm berechnet wird; die Ausgabevariable des Programms ist dabei stets x_1 .

| | | |
|--|---|---|
| <p>(a) INPUT x_1, x_2</p> <p style="padding-left: 20px;">$x_3 := x_2 - x_1;$</p> <p style="padding-left: 20px;">WHILE $x_3 \neq 0$ DO</p> <p style="padding-left: 40px;">$x_3 := 1$</p> <p style="padding-left: 20px;">END;</p> <p style="padding-left: 20px;">$x_1 := 2 \cdot x_1;$</p> <p style="padding-left: 20px;">$x_1 := x_1 + 3$</p> | <p>(b) INPUT x_1, x_2</p> <p style="padding-left: 20px;">$M_1: x_3 := x_2 \cdot x_2;$</p> <p style="padding-left: 20px;">$x_4 := x_3 - 41;$</p> <p style="padding-left: 20px;">IF $x_4 = 0$ THEN</p> <p style="padding-left: 40px;">GOTO $M_1;$</p> <p style="padding-left: 20px;">GOTO $M_2;$</p> <p style="padding-left: 20px;">$M_2: x_1 := x_1 + x_3;$</p> <p style="padding-left: 20px;">HALT</p> | <p>(c) INPUT x_1, x_2, x_3</p> <p style="padding-left: 20px;">$x_2 := x_2 \cdot x_2;$</p> <p style="padding-left: 20px;">$x_4 := x_2 - x_3;$</p> <p style="padding-left: 20px;">IF $x_4 = 0$ THEN</p> <p style="padding-left: 40px;">$x_2 := x_3$</p> <p style="padding-left: 20px;">END;</p> <p style="padding-left: 20px;">$x_3 := x_2 - x_1;$</p> <p style="padding-left: 20px;">$x_1 := x_1 \cdot x_2;$</p> <p style="padding-left: 20px;">IF $x_3 = 0$ THEN</p> <p style="padding-left: 40px;">$x_1 := 1;$</p> <p style="padding-left: 20px;">LOOP x_2 DO</p> <p style="padding-left: 40px;">$x_1 := 2 \cdot x_1$</p> <p style="padding-left: 20px;">END</p> <p style="padding-left: 20px;">END</p> |
|--|---|---|

Lösung. Die Funktionen, die durch die gegebenen Programme berechnet werden, sind:

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } f(x_1, x_2) &= \begin{cases} 2x_1 + 3 & (x_1 \geq x_2) \\ \perp & (x_1 < x_2) \end{cases} & \text{(b) } f(x_1, x_2) &= \begin{cases} x_1 + x_2^2 & (x_2 \geq 7) \\ \perp & (x_2 < 7) \end{cases} \\
 \text{(c) } f(x_1, x_2, x_3) &= \begin{cases} 2^{g(x_2, x_3)} & (x_1 \geq g(x_2, x_3)) \\ x_1 \cdot g(x_2, x_3) & (x_1 < g(x_2, x_3)) \end{cases}, \text{ mit } g(x_2, x_3) = \max(x_2^2, x_3)
 \end{aligned}$$