Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Es dürfen primitiv rekursive Funktionen verwendet werden, die in der Vorlesung besprochen wurden.

(a) $f(x) = x!$ (b) $g(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$ (c) $h(x,y) = y^x$ (d) $k(x,y,z) = \begin{cases} y & (x = 0) \\ z & (x \neq 0) \end{cases}$

Lösung. Im Folgenden bezeichnen wir die Komposition (siehe Folie 57 der Vorlesung) einer Funktion $g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und Funktionen $f_1, \dots, f_k\colon \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{comp}(g, f_1, \dots, f_k)\colon \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}.$$

Desweiteren werden wir verwenden, dass Addition $\mathrm{add}(x,y)$ und Multiplikation $\mathrm{mult}(x,y)$ primitv rekursiv sind; siehe dazu Folien 59 und 60 der Vorlesung.

(a) Wir betrachten zunächst die Funktion $\varphi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(x,y) = x \cdot (y+1)$, welche als Komposition primitiv rekursiver Funktionen selbst primitiv rekursiv ist:

$$\varphi = \mathrm{comp}(\mathrm{mult}, \pi_1^2, \mathrm{comp}(s, \pi_2^2)).$$

Wir können nun $f(x) = x!$ mittels primitiver Rekursion definieren durch

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(x+1) &= \varphi(f(x), x). \end{aligned}$$

(b) Es gilt $g(x) = \sum_{i=1}^{x} i$ (Gauß'sche Summenformel). Damit lässt sich die Funktion g analog zur Fakultät aus Teil (a) definieren. Wir betrachten zunächst $\varphi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(x,y) = x + (y+1)$. Diese Funktion ist als Komposition primitiv rekursiver Funktionen selbst primitiv rekursiv, denn es gilt $\varphi = \mathrm{comp}(\mathrm{add}, \pi_1^2, \mathrm{comp}(s, \pi_2^2))$.

Die Funktion $g(x) = \frac{x(x+1)}{2}$ lässt sich nun mittels primitiver Rekursion darstellen:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g(x+1) &= \varphi(g(x), x). \end{aligned}$$

(c) Wir betrachten $\varphi = \mathrm{comp}(\mathrm{mult}, \pi_1^3, \pi_3^3)\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, also $\varphi(x,y,z) = x \cdot z$. Es gilt

$$\begin{aligned} h(0,y) &= 1 \\ h(x+1,y) &= \varphi(h(x,y), x, y). \end{aligned}$$

Somit kann h mittels primitiver Rekursion aus primitiv rekursiven Funktionen gebildet werden und ist damit selbst primitiv rekursiv.

(d) Auch in diesem Fall lässt sich die Funktion k mittels primitiver Rekursion bilden:

$$\begin{aligned} k(0, y, z) &= \pi_1^2(y, z) \\ k(x+1, y, z) &= \pi_4^4(k(x, y, z), x, y, z). \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv und streng monoton wachsend. Zeigen Sie: Es existiert eine primitiv rekursive Linksinverse g von f, d.h. $g(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Betrachten Sie, für eine geeignet gewählte zweistellige Funktion $h(x, y)$, die Funktion $g(y) = \max\{x \leq y \mid h(x, y) = 0\}$ (wobei wir hier $\max \emptyset = 0$ setzen).

Lösung. Wir zeigen zunächst, dass wir mit Wahl der Funktion $h(x, y) = f(x) - y$ eine Linksinverse $g(y) = \max\{x \leq y \mid h(x, y) = 0\}$ von f erhalten. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} g(f(x_0)) &= \max\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq f(x_0) \wedge f(x) - f(x_0) = 0\} \\ &= \max\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq f(x_0) \wedge f(x) \leq f(x_0)\} \\ &= \max\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \leq f(x_0)\} = x_0. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass für die streng monoton wachsende Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stets $x \leq f(x)$ gilt, weswegen $f(x) \leq f(x_0)$ die Bedingung $x \leq f(x_0)$ impliziert.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $g(y) = \max\{x \leq y \mid h(x, y) = 0\}$ mit obiger Wahl der Funktion $h(x, y)$ eine primitiv rekursive Funktion ist. Wir werden stattdessen allgemeiner zeigen, dass für jede primitiv rekursive Funktion $h(x, y)$ die zugehörige Funktion $g(y)$ ebenfalls primitiv rekursiv ist. Dazu betrachten wir zunächst die Funktion

$$\tilde{g}(y_1, y_2) = \max\{x \leq y_1 \mid h(x, y_2) = 0\}.$$

Es gilt $\tilde{g}(0, y_2) = 0$ (unabhängig davon, ob $h(0, y_2) = 0$ oder $h(0, y_2) \neq 0$) sowie

$$\tilde{g}(y_1 + 1, y_2) = \begin{cases} y_1 & (h(y_1, y_2) = 0) \\ \tilde{g}(y_1, y_2) & (h(y_1, y_2) \neq 0). \end{cases}$$

Als Komposition primitv rekursiver Funktionen ist dabei die rechte Seite selbst eine primitiv rekursive Funktion in den Argumenten $\tilde{g}(y_1, y_2)$, y_1 und y_2 (die dabei auftretende Fallunterscheidung lässt sich etwa mit Hilfe von Aufgabe 1 (d) realisieren). Damit ist auch die Funktion $\tilde{g}(y_1, y_2)$ primitv rekursiv und somit auch $g(y) = \tilde{g}(y, y)$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f die zugehörige Funktion μf.

(a) $f(n, x) = n + x$

(b) $f(n, x) = x - n$

(c) $f(n, x, y) = x - n \cdot y$

(d) $f(n, x, y, z) = (5^x + y) - z^5 \cdot n$

(e) $f(n, x, y, z) = (y \dot{-} 5n^2) + (x + z) \cdot n$

(f) $f(n, x, y) = \max(2n, x, y) \dot{-} n$

Lösung. Da alle gegebenen Funktionen total sind, genügt es jeweils die kleinste Nullstelle aus den natürlichen Zahlen zu finden.

(a) Für $x = 0$ erhalten wir die Nullstelle $n = 0$. Falls $x \neq 0$ ist, so hat $f(n, x)$ keine Nullstellen in den natürlichen Zahlen. Somit erhalten wir

$$(\mu f)(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \perp & (x \neq 0). \end{cases}$$

(b) Aus der Definition der *modifizierten* Subtraktion ergibt sich, dass $x \dot{-} n = 0$ genau dann gilt, wenn $x \leq n$. Somit erhalten wir

$$(\mu f)(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n, x) = 0\} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x\} = x.$$

(c) Sei zunächst $y \neq 0$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\mu f)(x, y) &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n, x, y) = 0\} \\
&= \min\{n \in \mathbb{N} \mid x \dot{-} n \cdot y = 0\} \\
&= \min\{n \in \mathbb{N} \mid x \leq n \cdot y\} \\
&= \min\{n \in \mathbb{N} \mid x/y \leq n\} \\
&= \lceil x/y \rceil.
\end{aligned}$$

Mit Betrachtung des Falls $y = 0$ ergibt sich insgesamt

$$(\mu f)(x, y) = \begin{cases} \lceil x/y \rceil & (y \neq 0) \\ \perp & (y = 0 \wedge x \neq 0) \\ 0 & (y = 0 \wedge x = 0). \end{cases}$$

(d) Ähnliche Überlegungen wie in Aufgabenteil (c) liefern

$$(\mu f)(x, y, z) = \begin{cases} \lceil \frac{5^x + y}{z^5} \rceil & (z \neq 0) \\ \perp & (z = 0). \end{cases}$$

(e) Wir bemerken zuerst, dass $f(n, x, y, z) = 0$ genau dann gilt, wenn sowohl $y \dot{-} 5n^2 = 0$ als auch $(x + z) \cdot n = 0$ gilt. Die erste Gleichung ist dabei für $n \geq \sqrt{y/5}$ erfüllt; die zweite Gleichung erfordert $x = z = 0$ oder $n = 0$. Insgesamt erhalten wir

$$(\mu f)(x, y, z) = \begin{cases} \lceil \sqrt{\frac{y}{5}} \rceil & (y = 0 \vee (x = 0 \wedge z = 0)) \\ \perp & (y \neq 0 \wedge (x \neq 0 \vee z \neq 0)). \end{cases}$$

(f) Wegen $2n \leq \max(2n, x, y)$ gilt $\max(2n, x, y) \leq n$ nur im Fall das $\max(2n, x, y) = 0$, also nur für $n = x = y = 0$. Somit erhalten wir

$$(\mu f)(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = 0 \wedge y = 0) \\ \perp & (x \neq 0 \vee y \neq 0). \end{cases}$$

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass folgende Funktionen μ-rekursiv sind.

(a) $f(x, y) = \begin{cases} y & (x = 0) \\ \perp & (x \neq 0) \end{cases}$ (b) $g(x, y) = \begin{cases} \lceil \log_y(x) \rceil & (x > 0 \wedge y > 1) \\ 0 & (x = 0 \wedge y > 1) \\ \perp & (y \leq 1) \end{cases}$

Lösung.

(a) Sei $h(n, x, y) = (y - n) + x$. Offensichtlich ist h primitiv rekursiv. Es gilt

$$(\mu h)(0, y) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (y - n) + 0 = 0\} = y = f(0, y).$$

Außerdem gilt für alle $x \neq 0$, dass

$$(\mu h)(x, y) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (y - n) + x = 0\} = \min \emptyset = \perp = f(x, y).$$

(b) Sei $h(n, x, y) = x - y^n$ mit der Konvention $0^0 = 1$. Die Funktion h ist primitiv rekursiv nach Aufgabe 1 (c). Es gilt

$$(\mu h)(x, y) = \begin{cases} \lceil \log_y(x) \rceil & (x > 0 \wedge y > 1) \\ 0 & (x = 0) \\ 0 & (x = 1 \wedge y \leq 1) \\ \perp & (x > 1 \wedge y \leq 1). \end{cases}$$

Insbesondere ist $(\mu h)(x, y) = g(x, y)$ für alle $y > 1$. Mit der Funktion f aus Teil (a) erhalten wir schließlich $g(x, y) = f(2 - y, (\mu h)(x, y))$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$, was zeigt, dass die Funktion g in der Tat μ-rekursiv ist.