Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey



# Übungsblatt 4

**Aufgabe 1.** Wahr oder falsch?

(a) Ist eine Funktion $f$ nicht total, so ist $\mu f$ ebenfalls nicht total.

(b) Es gibt unendlich viele Funktionen $f$, so dass $\mu f$ primitiv rekursiv ist.

Die folgenden Aussagen betreffen Funktionen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(c) Sind $f$ und $g$ berechenbar, dann ist auch $g \circ f$ berechenbar.

(d) Ist $g \circ f$ berechenbar, dann sind auch $f$ und $g$ berechenbar.

**Lösung.**

(a) **Falsch.** Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(0) = 0$ und $f(x) = \perp$ für $x > 0$ ist nicht total, wohl aber die zugehörige Funktion $\mu f$; es gilt $(\mu f)() = 0$.

(b) **Wahr.** Für $k \geq 0$ sei $f_k \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $f_k(x) = 0$ für $x \leq k$ und $f_k(x) = \perp$ sonst. Die zugehörigen Funktionen $\mu f_k$ sind konstant und somit primitiv rekursiv.

(c) **Wahr.** Um $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ zu berechnen, können wir erst $y = f(x)$ berechnen und danach $g(y)$. Man beachte dabei, dass $(g \circ f)(x)$ genau dann undefiniert ist, wenn entweder $f(x)$ undefiniert ist oder aber $g(y)$ undefiniert ist.

(d) **Falsch.** Wir können etwa $g$ als die überall undefinierte Funktion $\Omega$ wählen. Dann ist die Funktion $g \circ f = \Omega \circ f = \Omega$ unabhängig von der Wahl von $f$ berechenbar. Ist $f$ eine nicht berechenbare Funktion, dann erhalten wir so ein Gegenbeispiel.

**Aufgabe 2.** Im Jahr 1970 gelang Yuri Matiyasevich der Beweis, dass Hilberts zehntes Problem – ein klassisches Entscheidungsproblem der Mathematik – unentscheidbar ist.

*Auf Eingabe eines Polynoms $p(x_1, \ldots, x_n)$ mit ganzzahligen Koeffizienten soll entschieden werden, ob die Gleichung $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ganzzahlige Lösungen besitzt.*

(a) Ist Hilberts zehntes Problem semi-entscheidbar?

(b) Ist das Komplement semi-entscheidbar?

**Lösung.**

(a) Das Problem ist semi-entscheidbar. Die Menge $\mathbb{Z}^n$, welche genau aus den möglichen Belegungnen für das Polynom $p(x_1, \ldots, x_n)$ besteht, ist abzählbar. Das bedeutet, dass wir alle möglichen Belegungen sukzessive durchprobieren können. Wenn es eine Belegung gibt, die das Polynom zu Null auswertet, dann wird eine solche Belegung nach endlicher Zeit gefunden und das Verfahren terminiert.

(b) Das Komplement des Problems ist nicht semi-entscheidbar, denn andernfalls wäre Hilberts zehntes Problem nach Teil $(a)$ entscheidbar, was nicht der Fall ist.

**Aufgabe 3.** Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ semi-entscheidbar. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Mengen $A \cup B \subseteq \Sigma^*$ und $A \cap B \subseteq \Sigma^*$ sind semi-entscheidbar.

(b) Ist $f\colon \Gamma^* \to \Sigma^*$ berechenbar, dann ist $f^{-1}(A) \subseteq \Gamma^*$ semi-entscheidbar.

(c) Ist $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ total und berechenbar, dann ist $f(A) \subseteq \Gamma^*$ semi-entscheidbar.

**Lösung.** Nach Voraussetzung existeren Algorithmen, die auf Eingabe von $x \in \Sigma^*$ genau dann terminieren, wenn $x \in A$ bzw. $x \in B$ gilt.

(a) Um für $x \in \Sigma^*$ zu testen, ob $x \in A \cup B$ bzw. $x \in A \cap B$ gilt, testen wir *parallel* mit den gegebenen Algorithmen ob $x \in A$ und $x \in B$ gilt. Im Fall der Vereinigung brechen wir die Berechnung ab, sobald einer der Algorithmen für $A$ oder $B$ terminiert.

(b) Für $x \in \Gamma^*$ berechenen wir zunächst $y = f(x)$ und testen dann, ob $y \in A$ gilt.

(c) Wir benutzen, dass eine Menge semi-entscheidbar ist, genau dann, wenn sie rekursiv aufzählbar ist (Folie 120 der Vorlesung). Ist $A = \emptyset$, dann ist $f(A) = \emptyset$. Andernfalls existiert eine totale, berechenbare, surjektive Funktion $\nu\colon \mathbb{N} \to A$. Dann ist die Funktion $f \circ \nu\colon \mathbb{N} \to f(A)$ ebenfalls total, berechenbar und surjektiv. In beiden Fällen folgt somit, dass $f(A)$ rekursiv aufzählbar, also semi-entscheidbar ist.

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen $X \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar sind. Geben Sie dazu ein WHILE-Programm an, welches die charakteristische Funktion $\chi_X$ berechnet.

(a) $P = \{\, p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl} \,\}$ (b) $Q = \{\, q \in \mathbb{N} \mid q \text{ ist Quadratzahl} \,\}$

**Lösung.** In den folgenden WHILE-Programmen für $\chi_P$ und $\chi_Q$ verwenden wir jeweils die Variable $n$ als Eingabe-Variable und die Variable $\chi$ als Ausgabe-Variable.

(a) Eine gegebene Zahl $n$ ist eine Primzahl, d.h. $n \in P$, genau dann, wenn $n \geq 2$ gilt und keine Zahl $2 \leq d < n$ existsiert mit $n \equiv 0 \pmod{d}$. In einer LOOP-Schleife berechnen wir $m = n \bmod d$ für alle $2 \leq d < n$ und testen jeweils, ob $m = 0$ gilt.

```
INPUT n; OUTPUT χ
χ := 1;
h := 1 − n;
IF h = 0 THEN χ := 0 END;
h := n − 2; d := 2;
LOOP h DO
   m := 0;
   LOOP n DO
      m := m + 1; h := d − m;
      IF h = 0 THEN m := 0 END
   END;
   IF m = 0 THEN χ := 0 END;
   d := d + 1
END
```

(b) Eine gegebene Zahl $n$ ist eine Quadratzahl, d.h. $n \in Q$, genau dann, wenn eine natürliche Zahl $0 \leq r \leq n$ existsiert mit $n = r \cdot r$.

```
INPUT n; OUTPUT χ
χ := 0;
h := n + 1; r := 0;
LOOP h DO
   m := r · r; h := n − m;
   IF h = 0 THEN
      h := m − n;
      IF h = 0 THEN χ := 1 END
   END;
   r := r + 1
END
```