Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

(a) Gelten $A \leq B$ und $B \leq A$, so ist $A = B$.

(b) Wenn $A \subseteq B$ und A unentscheidbar ist, dann ist auch B unentscheidbar.

(c) Wenn $A \leq B$ und A semi-entscheidbar ist, dann ist auch B semi-entscheidbar.

(d) Wenn $A \leq B$ und B semi-entscheidbar ist, dann ist auch A semi-entscheidbar.

(e) Falls $A \leq B$ gilt, so gilt auch $\overline{A} \leq \overline{B}$.

Lösung.

(a) **Falsch.** Ein Gegenbeispiel ist etwa durch $A = \{0\}$ und $B = \{1\}$ gegeben, wobei der Homomorphismus $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ mit $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$ sowohl eine Reduktion von A auf B, als auch eine Reduktion von B auf A liefert.

(b) **Falsch.** Die Menge $B = \{0,1\}^*$ ist entscheidbar, enthält aber (schon aus Kardinalitätsgründen) unentscheidbare Mengen; konkret etwa $A = H_0$.

(c) **Flasch.** Sei $B \subseteq \{0,1\}^*$ eine belibige Menge, die nicht semi-entscheidbar ist; konkret etwa $B = \overline{H_0}$. Dann ist $B \neq \{0,1\}^*$, da $\{0,1\}^*$ semi-entscheidbar ist. Nach Teil (a) von Aufgabe 2 gilt $A \leq B$ für die semi-entscheidbare Menge $A = \emptyset$.

(d) **Wahr.** Siehe Aufgabe 3 Teil (b) auf Blatt 4.

(e) **Wahr.** Seien $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$ gegeben, und sei $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ eine totale und berechenbare Funktion mit $x \in A \iff f(x) \in B$ für alle $x \in \Sigma^*$. Dann gilt auch die Kontraposition $x \notin A \iff f(x) \notin B$, also $x \in \overline{A} \iff f(x) \in \overline{B}$.

Aufgabe 2. Welche Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ erfüllen die folgenden Bedingungen?

(a) $\emptyset \leq L$ (b) $L \leq \emptyset$ (c) $\{\varepsilon\} \leq L$ (d) $L \leq \{\varepsilon\}$ (e) $\Sigma^* \leq L$ (f) $L \leq \Sigma^*$

Folgern Sie: Sind A und B mit $\emptyset \subsetneq A, B \subsetneq \Sigma^*$ entscheidbar, dann gilt $A \leq B$ und $B \leq A$.

Lösung.

(a) Wir nehmen zunächst an, dass $\emptyset \leq L$ gilt. Es existiert also eine totale, berechenbare Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $x \in \emptyset$ genau dann, wenn $f(x) \in L$. Wegen $\varepsilon \in \Sigma^*$ und $\varepsilon \notin \emptyset$ folgt $f(\varepsilon) \notin L$, also $L \neq \Sigma^*$. Ist umgekehrt $L \neq \Sigma^*$, dann existiert ein $a \in \Sigma^* \setminus L$, und die konstante Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit $f(x) = a$ ist eine Reduktion von $\emptyset$ auf L. Zusammengefasst zeigt dies

$$\emptyset \leq L \iff L \neq \Sigma^*.$$

(b) Wir nehmen an, dass $L \leq \emptyset$ gilt. Dann existiert also eine totale, berechenbare Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $x \in L$ genau dann, wenn $f(x) \in \emptyset$. Also gilt $x \notin L$ für alle $x \in \Sigma^*$ und somit $L = \emptyset$. Umgekehrt folgt aus $L = \emptyset$ natürlich $L \leq \emptyset$, etwa mit der Identität $\mathrm{id}\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ als Reduktion. Dies zeigt

$$L \leq \emptyset \iff L = \emptyset.$$

Durch Komplementbildung liefert dies auch Antworten für die Teilaufgaben (e) und (f).

(e) Wegen $A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$ und Teilaufgabe (a) erhalten wir

$$\Sigma^* \leq L \iff \emptyset \leq \overline{L} \iff \overline{L} \neq \Sigma^* \iff L \neq \emptyset.$$

(f) Wegen $A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$ und Teilaufgabe (b) erhalten wir

$$L \leq \Sigma^* \iff \overline{L} \leq \emptyset \iff \overline{L} = \emptyset \iff L = \Sigma^*.$$

Es verbleiben noch die Aufgabenteile (c) und (d), sowie die Folgerung.

(c) Wir nehmen wieder an, dass $\{\varepsilon\} \leq L$ gilt. Wegen $\emptyset \leq \{\varepsilon\}$ (siehe Teilaufgabe (a)) gilt dann auch $\emptyset \leq L$ und somit $L \neq \Sigma^*$. Analog folgt wegen $\Sigma^* \leq \{\varepsilon\}$ auch $\Sigma^* \leq L$ und somit $L \neq \emptyset$. Dies zeigt $\emptyset \subsetneq L \subsetneq \Sigma^*$. Umgekehrt folgt aus $\emptyset \subsetneq L \subsetneq \Sigma^*$ zunächst, dass $a, b \in \Sigma^*$ existieren mit $a \in L$ und $b \notin L$. Dann definiert $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit $f(\varepsilon) = a$ und $f(x) = b$ für alle $x \neq \varepsilon$ eine Reduktion $\{\varepsilon\} \leq L$. Also folgt

$$\{\varepsilon\} \leq L \iff \emptyset \subsetneq L \subsetneq \Sigma^*.$$

(d) Wir nehemen wieder an, dass $L \leq \{\varepsilon\}$ gilt. Da $\{\varepsilon\}$ entscheidbar ist, folgt daraus nun, dass auch L entscheidbar ist. Sei umgekehrt L entscheidbar. Wir betrachten die Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, mit $f(x) = \varepsilon$ falls $x \in L$ sowie $f(x) = a$ für ein festes Wort $a \in \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$ falls $x \notin L$. Da L entscheidbar ist, ist diese Funktion berechenbar. Sie definiert eine Reduktion $L \leq \{\varepsilon\}$. Wir schließen also

$$L \leq \{\varepsilon\} \iff L \text{ entscheidbar.}$$

Die Folgerung erhlaten wir nun aus den Aufgabenteilen (c) und (d): Ist A entscheidbar und gilt $\emptyset \subsetneq B \subsetneq \Sigma^*$, dann erhalten wir hieraus $A \leq \{\varepsilon\}$ und $\{\varepsilon\} \leq B$, somit also $A \leq B$.

Aufgabe 3. Für Sprachen $A, B \subseteq \{0,1\}^*$ sei die markierte Vereinigung definiert durch

$$A \oplus B = \{0v \mid v \in A\} \cup \{1v \mid v \in B\}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen für beliebige Sprachen $A, B \subseteq \{0,1\}^*$ und $C \subsetneq \{0,1\}^*$.

(a) Es gelten $A \leq A \oplus B$ und $B \leq A \oplus B$.

(b) Es gilt genau dann $A \oplus B \leq C$, wenn $A \leq C$ und $B \leq C$ gelten.

(c) Genau dann ist $A \oplus B$ entscheidbar, wenn A und B entscheidbar sind.

Lösung.

(a) Es gilt $A \leq A \oplus B$: Eine Reduktion erhalten wir mit $f_A(w) = 0w$ für $w \in \{0,1\}^*$. Denn: Es ist $w \in A$ genau dann, wenn $0w \in \{0x \mid x \in A\}$. Aber da Wörter aus der zweiten Menge (nach $\cup$) mit einer 1 beginnen, ist genau dann auch $0w \in A \oplus B$, also $f_A(w) \in A \oplus B$. Wir erhalten analog $B \leq A \oplus B$ mit der Reduktion $f_B(w) = 1w$.

(b) Es gelte zunächst $A \leq C$ und $B \leq C$. Es gibt also totale und berechenbare Funktionen f_A und f_B, die A auf C bzw. B auf C reduzieren. Somit erhalten wir eine Reduktion f von $A \oplus B$ auf C via

$$f(w) = \begin{cases} f_A(v) & (w = 0v) \\ f_B(v) & (w = 1v) \\ \bar{c} & (w = \varepsilon) \end{cases}$$

für eine festes element $\bar{c} \in \overline{C}$, wobei f wieder total und berechenbar ist.

Die Umkehrung folgt aus Teil (a) und der Transitivität von Reduzierbarkeit.

(c) Wegen Teil (a) ist klar, dass aus der Entscheidbarkeit von $A \oplus B$ folgt, dass A und B entscheidbar sein müssen. Seien nun also A und B entscheidbar. Aus der Entscheidbarkeit von A und B folgt per Definition, dass die charakteristischen Funktionen χ_A und χ_B berechenbar sind. Somit ist aber die charakteristische Funktion $\chi_{A \oplus B}$ eingeschränkt auf $\{0x \mid x \in \{0,1\}^*\}$ bzw. $\{1x \mid x \in \{0,1\}^*\}$, also $\chi_{A \oplus B}|_{\{0x\}}$ bzw. $\chi_{A \oplus B}|_{\{1x\}}$, durch χ_A und χ_B berechenbar. Wir erhalten also eine berechenbare Funktion

$$\chi_{A \oplus B}(w) = \begin{cases} \chi_A(v) & (w = 0v) \\ \chi_B(v) & (w = 1v) \\ 0 & (w = \varepsilon). \end{cases}$$

Es folgt, dass $A \oplus B$ entscheidbar ist.

Alternativ lässt sich mit Teil (b) und Aufgabe 2 Teil (d) argumentieren: $A \oplus B$ ist entscheidbar genau dann, wenn $A \oplus B \leq \{\varepsilon\}$. Das ist wiederum äquivalent zu $A \leq \{\varepsilon\}$ und $B \leq \{\varepsilon\}$, also dazu, dass A und B entscheidbar sind.

Aufgabe 4. Im folgenden betrachten wir die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid 2025 \leq |T(M_w)| \leq 2026\}.$$

(a) Geben Sie Reduktionen $H_0 \leq L$ und $\overline{H_0} \leq L$ an.

(b) Ist L semi-entscheidbar? Ist $\overline{L}$ semi-entscheidbar?

Lösung.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $w \in \{0,1\}^*$ die Kodierung einer Turingmaschine M_w. Wir ordnen dieser die Kodierung $f_n(w)$ der Turingmaschine $M_{f_n(w)}$ zu, die wie folgt arbeitet.

Auf Eingabe von $x \in \{0,1\}^*$ überprüft $M_{f_n(w)}$ zunächst, ob $x = \text{bin}(k)$ für eine natürliche Zahl k gilt. Ist dies nicht der Fall oder ist $k > n$, dann lehnt die Maschine ab. Ist hingegen $k < n$, dann akzeptiert die Maschine ohne weitere Berechnung. Im Fall $k = n$ simulieren wir zunächst die Maschine M_w auf leerem Band. Terminiert die Berechnung, dann akzeptiert $M_{f_n(w)}$ die Eingabe x.

Man beachte, dass die Maschine $M_{f_n(w)}$ entweder genau $n+1$ oder genau n Wörter akzeptiert. Ersteres ist dabei genau dann der Fall, wenn die Maschine neben den Eingaben $\text{bin}(0), \ldots, \text{bin}(n-1)$, die immer akzeptiert werden, auch die Eingabe $\text{bin}(n)$ akzeptiert. Das geschieht dann, und nur dann, wenn die Maschine M_w auf leerem Band hält, also wenn $w \in H_0$ gilt. Somit liefert die Funktion f_{2024}, welche offensichtlich total und berechenbar ist, eine Reduktion von H_0 auf L. Analog definiert die Funktion f_{2026} eine Reduktion von $\overline{H_0}$ auf L.

(b) Weder L noch $\overline{L}$ sind semi-entscheidbar. Wäre L semi-entscheidbar, so müsste dies wegen $\overline{H_0} \leq L$ auch für $\overline{H_0}$ gelten, was nicht der Fall ist. (H_0 ist semi-entscheidbar, aber unentscheidbar; somit kann $\overline{H_0}$ nicht ebenfalls semi-entscheidbar sein.) Analog ist $\overline{L}$ nicht semi-entscheidbar, denn es gilt $\overline{H_0} \leq \overline{L}$ wegen $H_0 \leq L$.