Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

(a) Wenn $(F \vee G)$ erfüllbar ist, dann ist auch F erfüllbar.

(b) Wenn $(F \wedge G)$ erfüllbar ist, dann ist auch F erfüllbar.

(c) Wenn $(F \leftrightarrow G)$ erfüllbar ist, dann ist $(F \leftrightarrow G)$ auch gültig.

(d) Wenn $(F \wedge G)$ unerfüllbar ist, dann ist F unerfüllbar oder G unerfüllbar.

(e) Wenn $(F \vee G)$ gültig ist, dann ist F erfüllbar oder G erfüllbar.

(f) Wenn F und G erfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.

(g) Wenn F und G unerfüllbar sind, dann gilt $F \equiv G$.

Lösung.

(a) **Falsch.** Sei $F = A \wedge \neg A$ und G eine beliebige erfüllbare Formel (etwa $G = A$), dann ist F unerfüllbar und $F \vee G$ erfüllbar (wegen $F \vee G \equiv G$).

(b) **Wahr.** Ist $F \wedge G$ erfüllbar, so existiert eine Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \models F \wedge G$. Diese Belegung erfüllt also $\mathcal{B}(F \wedge G) = \mathcal{B}(F) \wedge \mathcal{B}(G) = 1$ und somit auch $\mathcal{B}(F) = 1$.

(c) **Falsch.** Sei $F = A$ und $G = B$, dann ist $F \leftrightarrow G$ erfüllbar aber nicht gültig: Die Belegung $\mathcal{B}_1 \colon A \mapsto 1, B \mapsto 1$ ist ein Modell für $F \leftrightarrow G$, was die Erfüllbarkeit dieser Formel zeigt. Andererseits ist die Belegung $\mathcal{B}_0 \colon A \mapsto 1, B \mapsto 0$ zu $F \leftrightarrow G$ passend, aber kein Modell für $F \leftrightarrow G$. Das zeigt, dass die Formel nicht gültig sein kann.

(d) **Falsch.** Die Formel $F \wedge G$ mit $F = A$ und $G = \neg A$ ist unerfüllbar. Die beiden Teilformeln F und G sind aber jeweils erfüllbar.

(e) **Wahr.** Zu jeder Formel, hier etwa $F \vee G$, existiert immer eine passende Belegung. Somit besitzt $F \vee G$ als gültige Formel insbesondere ein Modell $\mathcal{B}$. Die Belegung $\mathcal{B}$ ist auch passend für die Teilformeln F und G. Wegen $\mathcal{B}(F \vee G) = \mathcal{B}(F) \vee \mathcal{B}(G) = 1$ gilt $\mathcal{B}(F) = 1$ oder $\mathcal{B}(G) = 1$, also ist $\mathcal{B}$ ein Modell für F oder ein Modell für G.

(f) **Falsch.** Die Formeln $F = A$ und $G = \neg A$ sind beide erfüllbar, aber nie gleichzeitig. Insbesondere ist etwa durch $\mathcal{B} \colon A \mapsto 1$ eine Belegung gegeben, die zu F und G passend ist, für die aber $\mathcal{B}(F) = 1 \neq 0 = \mathcal{B}(G)$ gilt. Dies zeigt $F \not\equiv G$.

(g) **Wahr.** Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige Belegung, die zu den Formeln F und G passt. Da beide Formeln unerfüllbar sind gilt dann $\mathcal{B}(F) = 0$ und $\mathcal{B}(G) = 0$, also $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$.

Aufgabe 2. Zeichnen Sie jeweils den Syntaxbaum zu folgenden Formeln F. Berechnen Sie anschließend jeweils den Wert $\mathcal{B}(F)$ für die gegebenen Formeln F und Belegungen $\mathcal{B}$.

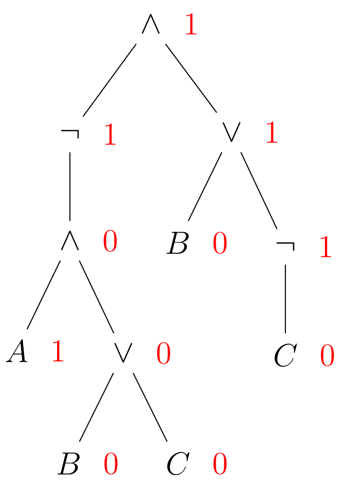
(a) $F = (\neg(A \wedge (B \vee C)) \wedge (B \vee \neg C))$ $\qquad$ $\mathcal{B}\colon A \mapsto 1,\ B \mapsto 0,\ C \mapsto 0$

(b) $F = ((\neg B \wedge \neg C) \leftrightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow C))$ $\qquad$ $\mathcal{B}\colon A \mapsto 1,\ B \mapsto 0,\ C \mapsto 1$

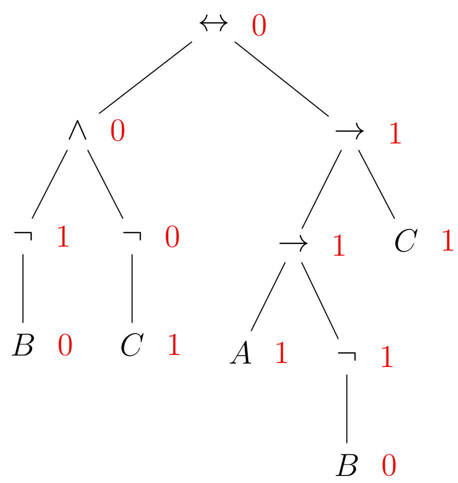
(c) $F = ((A \vee (B \leftrightarrow \neg C)) \rightarrow \neg(A \vee B))$ $\qquad$ $\mathcal{B}\colon A \mapsto 0,\ B \mapsto 1,\ C \mapsto 1$

Lösung.

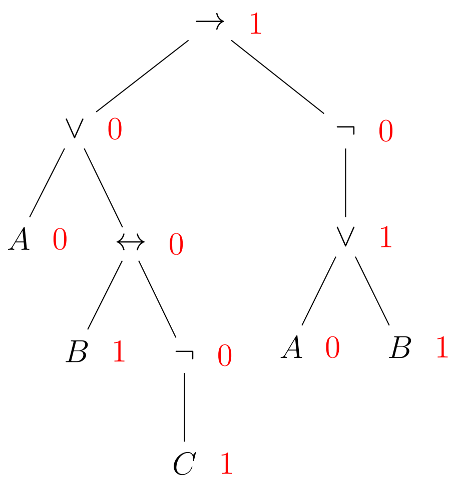
(a) Der Syntaxbaum der Formel F ist nachfolgend dargestellt. Diesen beschriften wir bottom-up mit den Werten (hier in Rot) der Teilformeln von F, wobei die Blätter die gegebenen Werte $\mathcal{B}(A)$, $\mathcal{B}(B)$ und $\mathcal{B}(C)$ erhalten. Das liefert $\mathcal{B}(F) = 1$.



(b) Wir gehen analog zu Teil (a) vor und erhalten $\mathcal{B}(F) = 0$.



(c) Wir gehen analog zu Teil (a) vor und erhalten $\mathcal{B}(F) = 1$.



Aufgabe 3. Der *Sheffersche Strich* $\uparrow$ (auch NAND-*Operator* genannt) ist die zweistellige Verknüpfung logischer Ausdrücke, die durch $F \uparrow G :\equiv \neg(F \wedge G)$ definiert ist.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass $A \uparrow (B \uparrow C) \not\equiv (A \uparrow B) \uparrow C$.

(b) Finden Sie zu $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$ und $A \leftrightarrow B$ logisch äquivalente Ausdrücke, die ausschließlich den Shefferschen Strich als Verknüpfung verwenden.

Lösung.

(a) Die Wahrheitstafel für $A \uparrow (B \uparrow C)$ und $(A \uparrow B) \uparrow C$ (sowie deren Teilformeln) ist nachfolgend abgebildet. Aus der zweiten Zeile dieser Wahrheitstafel lässt sich eine Belegung $\mathcal{B}$ ablesen, nämlich $\mathcal{B}\colon A \mapsto 0, B \mapsto 0, C \mapsto 1$, für die

$$\mathcal{B}(A \uparrow (B \uparrow C)) \neq \mathcal{B}((A \uparrow B) \uparrow C)$$

gilt. Die Existenz einer solchen Belegung zeigt, dass $A \uparrow (B \uparrow C) \not\equiv (A \uparrow B) \uparrow C$.

A	B	C	$A \uparrow B$	$B \uparrow C$	$A \uparrow (B \uparrow C)$	$(A \uparrow B) \uparrow C$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1

(b) Es gelten die folgenden logischen Äquivalenzen:

$$\neg A \equiv A \uparrow A, \quad A \wedge B \equiv (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B), \quad A \vee B \equiv (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B),$$
$$A \to B \equiv A \uparrow (B \uparrow B), \quad A \leftrightarrow B \equiv (A \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)).$$

In der Tat ist $\neg A \equiv \neg(A \wedge A) \equiv A \uparrow A$. Unter Verwendung des Ausdrucks für die Negation erhalten wir dann $A \wedge B \equiv \neg\neg(A \wedge B) \equiv \neg(A \uparrow B) \equiv (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$, sowie $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv \neg A \uparrow \neg B \equiv (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$. Für die Implikation haben wir $A \to B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B) \equiv A \uparrow (B \uparrow B)$, und für die Äquivalenz gilt $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \equiv \neg(\neg(A \wedge B) \wedge (A \vee B)) \equiv (A \uparrow B) \uparrow (A \vee B)$, was schließlich auf $A \leftrightarrow B \equiv (A \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B))$ führt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass das folgende Problem **NP**-vollständig ist.

$$L = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare aussagenlogische Formel der Form } G \to H\}$$

Lösung. Die Abbildung, die jede Kodierung einer aussagenlogischen Formel F auf die Kodierung der Formel $(A \vee \neg A) \to F$ abbildet (und sonstige Wörter auf ein beliebiges aber festes Wort $x \notin L$), ist (bei geeigneter Kodierung) polynomiell berechenbar und definiert eine Reduktion von $\textsc{Sat}$ auf L. Umgekehrt können wir jede Kodierung einer aussagenlogischen Formel der Form $G \to H$ auf die Kodierung der Formel $\neg G \vee H$ abbilden (und sonstige Wörter auf ein beliebiges aber festes Wort $y \notin \textsc{Sat}$). Auch diese Funktion ist polynomiell berechenbar. Sie definiert eine Reduktion von L auf $\textsc{Sat}$.

Da $\textsc{Sat}$ ein **NP**-hartes Problem ist, ist wegen $\textsc{Sat} \leq_p L$ auch L ein **NP**-hartes Problem. Wegen $\textsc{Sat} \in \mathbf{NP}$ und $L \leq_p \textsc{Sat}$ gilt $L \in \mathbf{NP}$. Insgesamt ist L somit **NP**-vollständig.