Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gilt $F \models G$ genau dann, wenn $(F \to G)$ gültig ist.

(b) Es gilt $F \equiv G$ genau dann, wenn $(F \leftrightarrow G)$ gültig ist.

(c) Es gilt $F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$ gelten.

Lösung.

(a) Gelte $F \models G$ und sei $\mathcal{B}$ eine zu F und G passende Belegung. Wegen $F \models G$ folgt aus $\mathcal{B} \models F$ stets, dass $\mathcal{B} \models G$. Somit gilt auch $\mathcal{B} \models (F \to G)$. Da dies für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ der Fall ist, ist die Aussage $(F \to G)$ gültig.

Wenn umgekehrt $(F \to G)$ gültig ist, dann gilt für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$, dass $\mathcal{B} \models (F \to G)$. Aus $\mathcal{B} \models F$ folgt damit auch $\mathcal{B} \models G$, also $F \models G$.

(b) Gelte $F \equiv G$. Für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt dann $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Daraus folgt nun, dass $\mathcal{B} \models (F \leftrightarrow G)$. Da dies für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ der Fall ist, ist die Aussage $(F \leftrightarrow G)$ gültig.

Wenn umgekehrt $(F \leftrightarrow G)$ gültig ist, dann gilt für jede zu F und G passende Belegung $\mathcal{B}$, dass $\mathcal{B} \models (F \leftrightarrow G)$, also $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Daraus folgt, dass $F \equiv G$.

(c) Aus Teil (b) ist bekannt, dass $F \equiv G$ genau dann gilt, wenn $(F \leftrightarrow G)$ gültig ist. Wegen $(F \leftrightarrow G) \equiv (F \to G) \wedge (G \to F)$ ist das genau dann der Fall, wenn die beiden Aussagen $(F \to G)$ und $(G \to F)$ gültig sind. Nach Teil (a) ist das wiederum äquivalent dazu, dass $F \models G$ und $G \models F$ gelten.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für die Formeln F_1, F_2 und F_3 mit nachfolgend gegebener Wahrheitstabelle, jeweils zugehörigen Formeln $\mathrm{DNF}(F_i)$ und $\mathrm{KNF}(F_i)$.

A	B	C	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Lösung. Aus den angegebenen Wahrheitswerten ergeben sich die folgenden Formeln.

$$\begin{aligned}\mathrm{DNF}(F_1) = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)\\ \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)\end{aligned}$$

$$\mathrm{KNF}(F_1) = (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$$

$$\mathrm{DNF}(F_2) = (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{KNF}(F_2) = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)\\ \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{DNF}(F_3) = (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)\\ \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)\end{aligned}$$

$$\mathrm{KNF}(F_3) = (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie durch geeignete Umformungen für die folgenden Formeln F jeweils zugehörige Formeln $\mathrm{DNF}(F)$ und $\mathrm{KNF}(F)$.

(a) $F = (\neg A \to B) \vee \neg(A \vee \neg C)$ (b) $F = \neg((A \leftrightarrow B) \wedge (\neg B \vee C))$

Lösung.

(a) Wir ersetzen zuerst die Teilformel $\neg A \to B$ durch die äquivalente Formel $\neg\neg A \vee B$. Durch entsprechende Umformungen erhalten wir nun

$$F \equiv (\neg\neg A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg C) \equiv \neg\neg A \vee B \vee (\neg A \wedge \neg\neg C) \equiv A \vee B \vee (\neg A \wedge C),$$

wobei die rechte Seite in DNF vorliegt. Also gilt $\mathrm{DNF}(F) = A \vee B \vee (\neg A \wedge C)$. Ein äquivalenter Ausdruck in KNF lässt sich nun hieraus durch Anwendung des Distributivitätsgesetztes erhalten:

$$A \vee B \vee (\neg A \wedge C) \equiv (A \vee B \vee \neg A) \wedge (A \vee B \vee C) = \mathrm{KNF}(F).$$

Es nun ist möglich (aber nicht notwendig) den Ausdruck weiter zu vereinfachen, denn $A \vee B \vee \neg A$ ist offensichtlich gültig, weswegen die erste Klausel auch weggelassen werden kann. Diese Vereinfachung würde zur äquivalenten Formel $A \vee B \vee C$ führen, welche sowohl in DNF als auch in KNF vorliegt.

(b) Wie in Teil (a) ersetzen wir zunächst die Teilformel $A \leftrightarrow B$ durch eine äquivalente Formel in Negation, Konjunktion und Disjunktion, nämlich $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$. Anwenden der Regeln von De Morgan und Entfernen von Doppelnegationen liefert:

$$\begin{aligned}F &\equiv \neg((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee C))\\ &\equiv \neg(\neg A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg B) \vee \neg(\neg B \vee C)\\ &\equiv (\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg\neg B) \vee (\neg\neg B \wedge \neg C)\\ &\equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (B \wedge \neg C).\end{aligned}$$

Wir können nun $\mathrm{DNF}(F) = (A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)\vee(B\wedge\neg C)$ setzen. Durch Anwenden des Distributivitätsgesetztes erhalten wir hieraus eine äquivalente Formel in KNF:

$$\begin{aligned}&(A \vee \neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee B) \wedge (A \vee B \vee \neg C)\\ &\quad \wedge (\neg B \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee B \vee B) \wedge (\neg B \vee B \vee \neg C).\end{aligned}$$

Auch in diesem Fall kann die Formel noch vereinfacht werden, da die erste, zweite, fünfte, siebte und achte Klausel jeweils gültig ist. Ferner können wir noch $B \vee B$ in der dritten Klausel durch B ersetzen und, wegen $(A \vee B) \models (A \vee B \vee \neg C)$, die vierte Klausel ebenfalls entfernen. Diese Verinefachungen liefern schließlich

$$\mathrm{KNF}(F) = (A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee \neg C).$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass 2-SAT $\in \mathbf{P}$ gilt. Hierbei bezeichnet 2-SAT das Problem, für eine gegebene aussagenlogische Formel in 2-KNF zu entscheiden, ob diese erfüllbar ist.

Hinweis: Interpretieren Sie Klauseln $A \vee B$ als Implikationen $\neg A \to B$ und $\neg B \to A$. Zeigen Sie, dass F genau dann unerfüllbar ist, wenn ein Literal A existiert, so dass sich jeweils Ketten solcher Implikationen von A zu $\neg A$ und von $\neg A$ zu A bilden lassen.

Lösung. Für eine gegebene Formel F in 2-KNF bezeichnen wir mit L_F die Menge derjenigen Literale, die (positiv oder negativ) in F vorkommen. Auf L_F definieren wir eine Präordnung $\leq_F$, wobei $A \leq_F B$ genau dann gelten soll, wenn $A = B$ gilt oder es eine Kette von Implikationen (wie im Hinweis beschrieben) von A zu B gibt. Für $A \leq_F B$ gilt dann nach Konstruktion für jedes Modell $\mathcal{B}$ von F, dass aus $\mathcal{B} \models A$ stets $\mathcal{B} \models B$ folgt.

Wir zeigen nun die Behauptung, dass F genau dann unerfüllbar ist, wenn ein $A \in L_F$ existiert mit $A \leq_F \neg A$ und $\neg A \leq_F A$. Da sich die Präordnung $(L_F, \leq_F)$ bei gegebener Formel F in polynomieller Zeit bestimmen lässt und sich auch die obige Bedingung in polynomieller Zeit überprüfen lässt, zeigt dies insbesondere, dass $L \in \mathbf{P}$ gilt.

Existiert $A \in L_F$ mit $A \leq_F \neg A$ und $\neg A \leq_F A$, so ist F unerfüllbar. Wäre nämlich $\mathcal{B}$ ein Modell für F, dann müsste zunächst $\mathcal{B} \models A$ oder $\mathcal{B} \models \neg A$ gelten, da das Literal A in F (positiv oder negativ) vorkommt und somit $\mathcal{B}(A)$ definiert ist. Wir erhalten nun einen Widerspruch, da wegen $A \leq_F \neg A$ und $\neg A \leq_F A$ folgt, dass $\mathcal{B} \models A$ *und* $\mathcal{B} \models \neg A$.
Nehmen wir nun Umgekehrt an, dass kein $A \in L_F$ mit $A \leq_F \neg A$ und $\neg A \leq_F A$ existiert. Ist $L_F = \emptyset$, dann ist die Formel F als leere Konjuktion gültig und somit insbesondere erfüllbar. Ansonsten wählen wir eine Literal A_1 welches maximal bezüglich $\leq_F$ ist (d.h., für alle $B \in L_F$ mit $A_1 \leq_F B$ gilt $B \leq_F A_1$) und betrachten $M_1 := \{A \in L_F \mid A_1 \leq_F A\}$. Die Menge M_1 ist nicht leer, alle Elemente $A \in M_1$ sind maximal bezüglich $\leq_F$ und, wenn $A \leq_F B$ für ein $A \in M_1$ und $B \in L_F$ gilt, dann folgt $B \in M_1$. Nun entfernen wir alle Vorkommen aller $A \in M_1$ aus F. Dabei Verwenden wir Umformungen, die unter der Annahme, dass alle $A \in M_1$ gültig wären, zu einer logisch äquivalenten Formel führen:

Alle Klauseln der Form $A \vee B$ bzw. $B \vee A$ mit $A \in M_1$ werden aus F entfernt.

Zu beachten ist dabei, dass auch alle Klauseln der Form $\neg A \vee B$ bzw. $B \vee \neg A$ mit $A \in M_1$ aus F entfernt werden, denn hier gilt $A \leq_F B$ und somit $B \in M_1$. In der resultierenden Formel F' kommen die Literale $A \in M_1$ also weder positiv noch negativ vor, d.h., es gilt $L_{F'} \subsetneq L_F$. Außerdem gilt für $A, B \in L_{F'}$, dass aus $A \leq_{F'} B$ auch $A \leq_F B$ folgt, da wir nur Klauseln aus F entfernt haben. Insbesondere gibt es kein Literal $A \in L_{F'}$ mit $A \leq_{F'} \neg A$ und $\neg A \leq_{F'} A$. Per Induktion über die Anzahl der Elemente von L_F können wir annehmen, dass F' erfüllbar ist. Jedes Modell $\mathcal{B}'$ für F', das nur auf den atomaren Formeln in $L_{F'}$ definiert ist, lässt sich nun aber zu einem Modell $\mathcal{B}$ für F fortsetzen: Wir setzen $\mathcal{B}(A) = 1$ für alle $A \in M_1$, was möglich ist, da für $A \in M_1$ stets $\neg A \notin M_1$ gilt.