

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Beantworten Sie folgende Fragen mit Hilfe des Markierungsalgorithmus.

(a) Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar?

- (i) $(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge \neg C \wedge A \wedge D \wedge (\neg D \vee B)$
- (ii) $(C \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee D \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E \vee F) \wedge A \wedge \neg F$

(b) Welche der folgenden Formeln sind gültig?

- (i) $(\neg B \wedge C) \vee C \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee \neg A$
- (ii) $(A \wedge D \wedge \neg I) \vee (B \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge H)$
 $\vee (\neg E \wedge F) \vee (\neg C \wedge F) \vee (G \wedge \neg H) \vee \neg B \vee \neg F \vee \neg G \vee I$

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- (i) $\neg C \vee \neg D \vee E, A, \neg A \vee C \vee \neg B \models E \vee \neg B$
- (ii) $A \vee \neg B \vee \neg D, \neg B \vee \neg G \vee F, \neg A \vee E \vee \neg C \vee \neg F, B, D \models E \vee \neg G \vee (\neg C \wedge D)$

Lösung.

(a) In beiden Fällen können wir den Markierungsalgorithmus direkt anwenden.

(i) Die gegebene Formel ist äquivalent zu

$$(A \wedge B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (1 \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow B).$$

- Markiere A wegen $1 \rightarrow A$ und D wegen $1 \rightarrow D$.
- Markiere B wegen $D \rightarrow B$ und weil D markiert ist.
- Markiere C wegen $A \wedge B \rightarrow C$ und weil A und B markiert sind.
- Gib “unerfüllbar” aus wegen $C \rightarrow 0$ und weil C markiert ist.

Die Formel ist also **unerfüllbar**.

(ii) Die gegenebe Formel ist äquivalent zu

$$(A \rightarrow C) \wedge (A \wedge B \wedge C \rightarrow D) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (D \wedge E \rightarrow F) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (F \rightarrow 0).$$

- Markiere A wegen $1 \rightarrow A$.
- Markiere C wegen $A \rightarrow C$ und weil A markiert ist.
- Markiere B wegen $A \rightarrow B$ und weil A markiert ist.
- Markiere D wegen $A \wedge B \wedge C \rightarrow D$ und weil A, B und C markiert sind.

- Gib “erfüllbar” aus.

Die Formel ist also **erfüllbar**.

(b) Um den Markierungsalgorithmus anzuwenden, nutzen wir jeweils die Tatsache, dass eine Formel G genau dann gültig ist, wenn ihre Negation $\neg G$ unerfüllbar ist.

(i) Die Negation der gegebenen Formel ist äquivalent zu

$$(C \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow 0) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge (1 \rightarrow A).$$

- Markiere A wegen $1 \rightarrow A$.
- Markiere B wegen $A \rightarrow B$ und weil A markiert ist.
- Gib “erfüllbar” aus.

Die Ausgangsformel ist also **nicht gültig**, da ihre Negation erfüllbar ist.

(ii) Die Negation der gegebenen Formel ist äquivalent zu

$$(A \wedge D \rightarrow I) \wedge (B \wedge E \rightarrow D) \wedge (B \wedge C \wedge H \rightarrow A) \wedge (F \rightarrow E) \\ \wedge (F \rightarrow C) \wedge (G \rightarrow H) \wedge (1 \rightarrow B) \wedge (1 \rightarrow F) \wedge (1 \rightarrow G) \wedge (I \rightarrow 0).$$

- Markiere B wegen $1 \rightarrow B$, F wegen $1 \rightarrow F$ und G wegen $1 \rightarrow G$.
- Markiere E wegen $F \rightarrow E$ und weil F markiert ist.
- Markiere C wegen $F \rightarrow C$ und weil F markiert ist.
- Markiere D wegen $B \wedge E \rightarrow D$ und weil B und E markiert sind.
- Markiere H wegen $G \rightarrow H$ und weil G markiert ist.
- Markiere A wegen $B \wedge C \wedge H \rightarrow A$ und weil B , C und H markiert sind.
- Markiere I wegen $A \wedge D \rightarrow I$ und weil A und D markiert sind.
- Gib “unerfüllbar” aus wegen $I \rightarrow 0$ und weil I markiert ist.

Die Ausgangsformel ist also **gültig**, da ihre Negation unerfüllbar ist.

(c) In diesem Aufgabenteilen nutzen wir die Tatsache, dass die Aussage $F_1, \dots, F_n \models G$ genau dann wahr ist, wenn die Formel $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \neg G$ unerfüllbar ist.

(i) Die zur gegebenen Aussage zugehörige Formel ist äquivalent zu

$$(C \wedge D \rightarrow E) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (A \wedge B \rightarrow C) \wedge (E \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow B).$$

- Markiere A wegen $1 \rightarrow A$ und B wegen $1 \rightarrow B$.
- Markiere C wegen $A \wedge B \rightarrow C$ und weil A und B markiert sind.
- Gib “erfüllbar” aus.

Die Aussage ist also **falsch**, da die zugehörige Formel erfüllbar ist.

(ii) Die zur gegebenen Aussage zugehörige Formel ist äquivalent zu

$$(B \wedge D \rightarrow A) \wedge (B \wedge G \rightarrow F) \wedge (A \wedge C \wedge F \rightarrow E) \\ \wedge (1 \rightarrow B) \wedge (1 \rightarrow D) \wedge (E \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow G) \wedge (D \rightarrow C).$$

- Markiere B wegen $1 \rightarrow B$, D wegen $1 \rightarrow D$ und G wegen $1 \rightarrow G$.
 - Markiere A wegen $B \wedge D \rightarrow A$ und weil B und D markiert sind.
 - Markiere F wegen $B \wedge G \rightarrow F$ und weil B und G markiert sind.
 - Markiere C wegen $D \rightarrow C$ und weil D markiert ist.
 - Markiere E wegen $A \wedge C \wedge F \rightarrow E$ und weil A , C und F markiert sind.
 - Gib “unerfüllbar” aus wegen $E \rightarrow 0$ und weil E markiert ist.

Die Aussage ist also **wahr**, da die zugehörige Formel unerfüllbar ist.

Aufgabe 2. Berechnen Sie $\text{Res}^k(F)$ mit $k = 0, 1, \dots$ für die Formel F mit Klauselmenge

$$\{\{A, \neg B\}, \{A, B, \neg C\}, \{B, C\}, \{\neg A, \neg C\}\}.$$

Lösung. Es gilt $\text{Res}^0(F) = F$. Des Weiteren gilt

$$\text{Res}^1(F) = \text{Res}^0(F) \cup \{\{A, \neg C\}, \{A, C\}, \{\neg B, \neg C\}, \{A, B\}, \{B, \neg C\}, \{\neg A, B\}\},$$

$$\text{Res}^2(F) = \text{Res}^1(F) \cup \{\{A\}, \{A, \neg A\}, \{B, \neg B\}, \{C, \neg C\}, \{B\}, \{\neg C\}\}$$

und $\text{Res}^k(F) = \text{Res}^2(F)$ für alle $k \geq 2$.

Aufgabe 3. Nutzen Sie das Resolutionsverfahren, um festzustellen, welche der folgenden Klauselmengen eine erfüllbare Formel definieren.

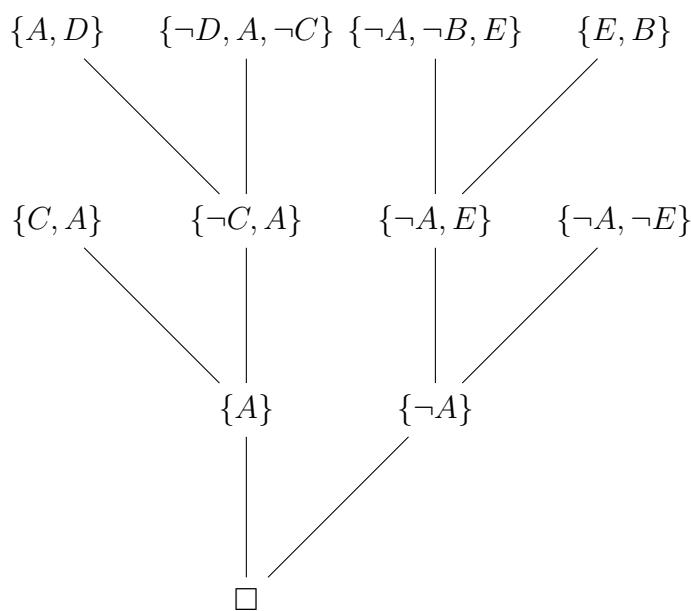
- (a) $\{\{\neg E, \neg A\}, \{\neg D, A, \neg C\}, \{A, D\}, \{A, C\}, \{\neg A, \neg B, E\}, \{E, B\}\}$

(b) $\{\{A, C\}, \{B\}, \{\neg C\}, \{A, \neg B, D\}, \{A, \neg C, \neg D\}\}$

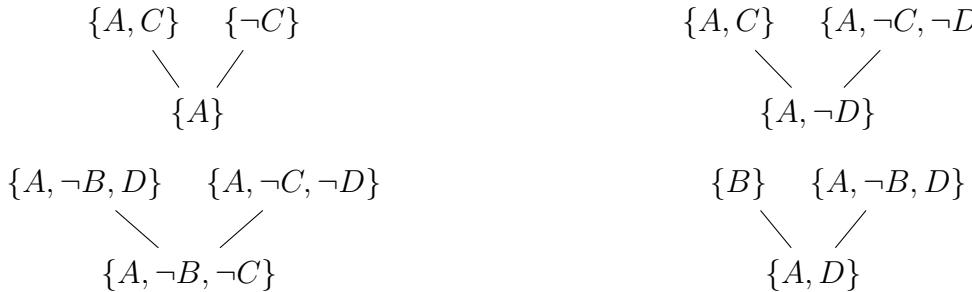
(c) $\{\{\neg C, A\}, \{C, \neg D\}, \{D, \neg B\}, \{D, \neg A\}, \{\neg A, \neg C\}, \{A, C, B\}\}$

Lösung.

- (a) Die zugehörige Formel ist unerfüllbar, da wir die leere Klausel \square resolvieren können:



(b) Aus den Ausgangsklauseln können wir zunächst folgende neue Klauseln resolvieren.



Anschließend erhalten wir noch die folgenden beiden neuen Klauseln.



Nun sind keine weiteren Resolutionsschritte mehr möglich und die zugehörige Formel ist erfüllbar, da wir die leere Klausel \square nicht herleiten konnten.

Alternativ kann argumentiert werden, dass man ohne das Literal $\neg A$ für keines der atomaren Formeln $L \in \{A, B, C, D\}$ ein Klausel-Paar $\{\{L\}, \{\neg L\}\}$ ableiten kann.

(c) Die zugehörige Formel ist unerfüllbar, da wir die leere Klausel \square resolvieren können:

